دراسة

مكتبة

رودي روكر

اللانهاية والعقل

علم وفلسفة اللانهاية

ترجمة: رزان يوسف سلمان

اللانهاية والعقل

علم وفلسفة اللانهاية

دراسات

اسم المؤلف: رودي روكر

Author: Rudy Rucker

عنوان الكتاب: اللانهاية والعقل... علم وفلسفة اللانهاية

Title: Infinity and the Mind

ترجمة: رزان يوسف سلمان

Translated by: Razan Yousef Selman

الناشر: دار المدى

P.C.: Al–Mada

الطبعة الأولى: 2022

First Edition: 2022

للإعلام والثقافة والفنون

Al–mada for media, culture and arts

بغداد: حي أبو نؤاس - محلة 102 - شارع 13 - بناية 141

Iraq/ Baghdad– Abu Nawas–neigh. 102 – 13 Street – Building 141

+ 964 (0) 770 2799 999   + 964 (0) 780 808 0800   + 964 (0) 790 1919 290

بيروت: بشامون - شارع المدارس

Beirut: Bchamoun – Schools Street

+ 961 175 2617   + 961 706 15017   + 961 175 2616

دمشق: شارع كرجية حداد- متفرع من شارع 29 أيار

Damascus: Karjieh Haddad Street – from 29 Ayar Street

+ 963 11 232 2276   + 963 11 232 2275   + 963 11 232 2289   ص.ب: 8272

رودي روكر

اللانهاية والعقل

علم وفلسفة اللانهاية

ترجمة : رزان يوسف سلمان

المحتويات

مقدمة الطبعة الثالثة

ها أنا ذا أكتب مقدمة ثالثة لكتابي «اللانهاية والعقل». ومع أملي بأن أتمكنِ يوماً ما من تجاوزه، إلا أن هذا العمل المبكر قد يكون عملي الأكثر شعبية. وكما يُقال: «للكتب أقدارها الخاصة».

أقدِّم شكري وامتناني للناشرين والقرَّاء الذين تواصلوا معي على مرِّ السنين، والذين تشاركوا معي فكرة أن اللانهاية مفهوم مهم ومثير للاهتمام، ويمكن للبحث في أغواره أن يحدِث فرقاً فعلياً في حياة المرء.

أسعى في هذه الفرصة إلى توسيع النص مع ثلاث ملاحظات تجدونها في الملحق، وتتطرق بالترتيب إلى علم الكون، وعلم الحاسوب، ونظرية المجموعة.

Rudy Rucker

لوس غاتوس، كاليفورنيا

22 حزيران 2004

مقدمة الطبعة الثانية

إن كتابة مقدمة ثانية أمر رائع حقاً!

عدتُ هذا الصيف إلى هايدلبرغ مع زوجتي العزيزة سيلفيا، وذلك للمرة الأولى منذ عام 1980. وإليكم هذا الاقتباس من دفتر يومياتي:

«تبعث عودتي إلى هايدلبرغ الحنين في أعماقي. قبل خمس عشرة سنة، كنتُ شاباً تملأ الأفكار الكثيرة رأسه، حينها كتبتُ «اللانهاية والعقل»، والروايتين «White Light» و«Software»، ومعظم قصصي القصيرة في «The 57th Franz Kavka». كان أطفالي الثلاثة (إيزابيل ورودي جونيور وجورجيا) صغاراً، وكانت أمهم «سيلفيا» ربة منزل رائعة تعتني بهم رغم صعوبة ذلك؛ لكن بالنسبة لي كانت تلك الأيام تشبه النعيم، على الأقل كما أتذكرها. أعتقد أني امتلكت ما يكفي من الوقت لتنضج أفكاري، كفكرة وعي الإنسان الآلي والتطور، لكني في حينها ظننت نفسي أخوض في بداية الطريق. لم أدرك أن ذلك كان علامة فارقة، وأنني لن أفكر مرة أخرى بذلك العمق في فلسفة الرياضيات. وبالفعل، توصلتُ إلى حلول مُرضية بالنسبة لي للكثير من المفارقات، كمفارقة الكاذب ومفارقة بيري؛ ولم تعد هذه المفارقات تنخر رأسي. كما توصلتُ إلى نوع من الحل التقريبي لمسألة الاستمرارية، كتبتُه على شكل رواية، هي «White Light»».

يمكن لنا اليوم أن نستعرض أفكار «اللانهاية والعقل» وسنجد أنه:

ما زالت نظرية كانتور في اللانهايات العليا واكتشافه لمسألة الاستمرارية من أعظم ما توصَّل إليه الرياضيون حتى اليوم.

الحل الذي يقدِّمه الفصل الثالث، «اللامُسمَّى»، للمفارقات الكلاسيكية

هو حل مُرضٍ، والدليل على ذلك أنني لم أعد أفكر فيها. (يمكن مراجعة الجدول في قسم «خلاصة» من الفصل الثالث).

الجدال حول المساواة بين الآلة والإنسان في قسم «الروبوت والروح» هو جدال دقيق وحاسم. (يمكن الاطلاع على قول كورت غودل الذي يُبنى عليه الجدال في بداية قسم «نحو وعي الروبوت»، ومعرفة موقفي في القسم الفرعي «وعي الروبوت»، والاطلاع على دحض رسمي لحجة لوكاس-بنروز في «ملاحظة تقنية حول التكافؤ بين الإنسان والآلة»).

أُثبتت محتويات الفصل الخامس عملياً. والخلاصة: **الكل واحد**. شكراً لك أيها المطلق. لنمجِّد الكل، وليمجِّد الكل **الواحد**!

Rudy Rucker

لوس غاتوس، كاليفورنيا

11 كانون الثاني 1995

مقدمة

يحمل هذا الكتاب بين صفحاته تعريفاً بكل أنواع اللانهاية: المُحتمَلة والفعلية، الرياضية والفيزيائية، اللاهوتية والدنيوية. وسيقودنا ذلك إلى العديد من المفارقات المذهلة. وبتفحُّصنا هذه المفارقات عن كثب، سنتعلم الكثير عن العقل البشري وقدراته وحدوده.

سنرى أن دراسة اللانهاية أمر يتجاوز البحث الأكاديمي الجاف والممل، وأن المسعى الفكري لمعرفة اللانهائي المطلق هو شكل من أشكال بحث النفس عن الإله، كما أدرك «جورج كانتور» سابقاً. وسواء وصلنا للهدف أم لم نصل، فإن وعينا سيضيء في كل خطوة نجتازها في طريق البحث.

كُتِب «اللانهاية والعقل» ليلائم القارئ العادي، وسيبدو في معظمه يسير الفهم لِمَن يحاول ذلك. وعموماً، الأقسام المنفصلة كاملةٌ في حدِّ ذاتها، ويمكن للقارئ أن يتخطَّى ما يشاء منها.

ينتهي كل فصل بمجموعة من الألغاز والمفارقات، ويضمّ الكتاب الأجوبة لها. أما الذين يرغبون بالتعمُّق أكثر في نظرية المجموعة والمنطق، فقدَّمتُ تدريبين رياضيين خاصين لهم في نهاية الكتاب.

فكرتُ في هذا الكتاب وكتبته على مدى عشر سنوات تقريباً. بدأت معظم أفكاره تتوارد إلى ذهني في الستينيات، حتى عام 1972. في ذلك الوقت كنتُ أكتب أطروحة دكتوراه في نظرية المجموعة بإشراف «إريك إليتناك» في جامعة روتجرز، وأتابع حلقة دراسية يحاضر فيها المُنظِّر البارز في نظرية «البرهان»، «غايسي تاكيوتي»، في معهد الدراسات المتقدمة في برينستون، نيوجرسي. في المرة الأولى التي قابلتُ فيها تاكيوتي سألته عن حقيقة نظرية

المجموعة، فأجابني: «إننا نحاول أن نصل إلى وصف دقيق لأفكار العقل اللامتناهي». ثم ضحك سعيداً بهذه المهمة المستحيلة.

في العام نفسه، قابلتُ «كورت غودل» في معهد الدراسات المتقدمة. لا أعتقد أن أحداً في العصر الحديث مارس التفكير المنطقي واستغرق فيه أكثر من غودل، كما لم يحاول أحد إثبات إحدى أكبر قضايا التعقيدات الرياضية بجدية ومثابرة كما فعل. مع ذلك، كان غودل شخصاً مرحاً لامعاً ذا عقل راجح، لا متحجِّراً مهووساً. وأكثر ما أدهشني فيه هو حريته الفكرية؛ كان قادراً على الانتقال بمرونة بين الرؤى الغامضة غير المؤكدة والاستنتاجات المنطقية الدقيقة. ومع دراستي لكتابات «جورج كانتور»، مؤسس نظرية المجموعة، أدركتُ أن لدى كانتور الحرية الفكرية نفسها؛ فالمنطق ونظرية المجموعة هي أدوات لميتافيزياء دقيقة.

بدأت كتابة هذا الكتاب بورقة بحثية قدمتُها لندوة في المنطق في جامعة أوكسفورد عام 1976، وتابعتُ الكتابة جدياً مع مجموعة من الملاحظات من الدورة التعليمية التي شاركتُ في إعطائها مع صديقي وليام ج. إدغار في جامعة نيويورك عام 1977. في عام 1978، أعدتُ كتابة الملاحظات لدورة تجريبية في الرياضيات. وهذه الملاحظات هي ما تشكِّل الفصلين الأول والثالث والجزء الأكبر من التدريب الأول.

أمضيتُ الفترة منذ عام 1978 حتى 1980 في معهد الرياضيات في جامعة هايدلبرغ، ضيفاً على «غيرت مولر» ومؤسسة ألكسندر فون همبولدت. كتبتُ أثناء وجودي هناك الفصل الرابع مع التدريب الثاني لمجموعة محاضرات حول فلسفة الرياضيات. وكتبتُ الفصلين الثاني والخامس خلال هذا الشتاء في كلية راندولف ماكون.

«*اللانهاية والعقل*» هو رحلة تمثِّل عملية تحوّل. أهديه بكل حبٍّ واحترام لكل من يسير على هذا الطريق.

R. v. B. R

لينشبرغ فرجينيا

19 حزيران 1981

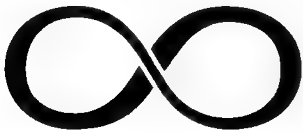
الفصل الأول

اللانهاية

تاريخ موجز للانهاية

إن رمز اللانهاية المألوف الذي يُشاهد كثيراً هو المنحني «∞»، ذو شكل العدد 8 نائماً، والذي يُدعى تقنياً بـ«المنحني ذي العروتين» (lemniscate). استُخدِم هذا الرمز لأول مرة في بحث في القرن السابع عشر عن المقاطع المخروطية[1]. سرعان ما أصبح يُستخدَم ليرمز للانهاية أو الخلود في مجموعة متنوعة من السياقات. على سبيل المثال، بدأ في القرن الثامن عشر ظهور رمز اللانهاية على بطاقة التاروت المعروفة باسم المحتال أو المشعوذ. ومن المثير للاهتمام أن رمز القبالة المرتبط بورقة التاروت هذه هو الحرف العبري ℵ (يُقرأ أَلِف)، واستخدم جورج كانتور، مؤسس النظرية الرياضية الحديثة للانهاية، الرمز $\aleph_0$، (يُقرأ أَلِف–صفر)، للدلالة على أول عدد لانهائي.

تكمن ملاءمة الرمز ∞ لمفهوم اللانهاية في حقيقة أن الحركة ممكنة الاستمرار إلى اللانهاية على منحنى بهذا الشكل... يمكننا تخيُّله كمسار سباق للسيارات إن أردنا. إن غير المنتهي هو مكوِّن رئيس لمفهوم اللانهاية، وترتبط مفاهيم اللامحدود واللامُتصوَّر بمفهوم اللانهاية أيضاً.



الشكل 1

1– Arithmetica Infinitorum of 1656.
انظر: Mathematical Work of John Wallis (London: Taylor and Francis, 1938).

الشكل 2

عادة ما توحي فكرة اللانهاية بالهول والخوف واللاجدوى. أي طفل يفكر فيها قد يغرق في الرعب من فكرة كونٍ يستمر ويستمر إلى الأبد. وصف «بليز باسكال» هذا الشعور بطريقة جيدة في قوله: «عندما أفكر في الامتداد الصغير لحياتي الذي تستوعبه سرمدية الزمن، أو بالحيِّز الصغير من المكان الذي يمكنني لمسه أو رؤيته، والذي يغرق في المكان اللامتناهي الذي لا أدركه ولا يدركني، يملؤني الخوف والدهشة من رؤية نفسي هنا بدلاً من هناك... الآن بدلاً من ذلك الحين»[2].

يمكن اعتبار تاريخ تأسيس الرياضيات بمثابة توسيع تدريجي للكون الرياضي ليشمل المزيد والمزيد من اللانهايات. كانت الكلمة اليونانية للانهاية هي (ἄπειρον = apeiron)، وتعني حرفياً اللامحدود، ويمكن

2- Blaise Pascal, peseés et Opuscules, Pensée No. 205 (Leon Brunschvicg, ed, Paris: Classiques Hachette, 1961), P. 427.

أن تعني أيضاً اللانهائي واللامُعرَّف واللامُتصَّور. كانت كلمة ἄπειρον تحمل معنى سلبياً وتُستخدم حتى للازدراء والاحتقار. فقد كان يُشار إلى الفوضى الأصلية التي نشأ منها العالم بالكلمة ذاتها، وكذلك الخط المعوج الاعتباطي، والمنديل المجعَّد المتسخ. لذا فإن ἄπειρον لا تحمل معنى الكِبَر اللانهائي فحسب، بل تعني أيضاً الاضطراب والتعقيد اللانهائي، أي شيء لا محدد بنحو لانهائي. وبكلمات أرسطو: «اللانهاية مَنقَصة، فهي ليست كمالاً بل غياب للحدود..»[3].

لم يكن هناك مكان للانهاية في عالَم فيثاغورس وأفلاطون. اعتقد فيثاغورس بإمكانية تمثيل أي جانب من جوانب العالم بنظام محدّد من الأعداد الطبيعية، (حيث «العدد الطبيعي» يعني «العدد الكامل».) واعتقد أفلاطون أن كل شيء، بما فيه المظهَر النهائي «الخير»، يجب أن يكون محدوداً ومعرَّفاً. يحمل ذلك تناقضاً مع جميع الماورائيين اللاحقين تقريباً، الذين افترضوا أن المطلق لانهائي بالضرورة. سأناقش في الفصل التالي محدودية الرياضيات اليونانية بسبب هذا الرفض للانهاية، حتى في شكلها البريء نسبياً كعدد حقيقي مع أجزاء عشرية لانهائية.

أدرك أرسطو أن هناك العديد من جوانب العالم التي تشير إلى حقيقة اللانهاية. على سبيل المثال، يبدو من الممكن أن يستمر الزمن إلى الأبد؛ ويبدو الفضاء لانهائياً، حتى إن مستقيماً في الفضاء سيضمّ عدداً لانهائياً من النقاط. تجنباً لهذه اللانهائيات الفعلية التي تهدِّد انتظام عالمه المحدود بديهياً، اخترع أرسطو مفهوم اللانهاية المُحتَملة المعاكسة للانهاية الفعلية. سأقدِّم وصفاً مفصَّلاً لهذا المفهوم في القسم القادم، لكن اسمحوا لي الآن بوصفه على النحو التالي: يقول أرسطو إن مجموعة الأعداد الطبيعية من المحتمل أن تكون لانهائية طالما لا وجود لأكبر عدد طبيعي، لكنه ينكر أن المجموعة لانهائية بالفعل طالما أنها لا توجد بحدِّ ذاتها كشيء واحد كامل. لكن هذا الاختلاف مشكوك فيه، وأنا أميل لموافقة كانتور الذي يرى أنه «... في

3- Aristotle, *Physics*, III.7.208a (Richard Hope, trans., University of Nebraska Press, 1961), p. 56.

الحقيقة اللانهاية المُحتَملة هي واقع مُفتَرض، طالما يشير مفهوم اللانهاية المُحتَملة دائماً إلى مفهوم لانهاية فعلية منطقية انطلق منها أولاً ليوجد»[4].

كان أفلوطين أول مفكر بعد أفلاطون يتبنَّى الاعتقاد بأن الإله على الأقل، أو الواحد، هو لانهائي، معلناً أن «الواحد المطلق، لا يُقاس ولا يُعَدُّ، وبذلك لا يُحَدُّ سواء داخلياً أو خارجياً؛ لأن أي تحديد له يحمل معنى ازدواجية»[5].

كما قام القديس أوغسطين بتكييف الفلسفة الأفلاطونية مع الدين المسيحي، ولم يكتفِ بالاعتقاد بأن الإله لانهائي فحسب، بل إن أفكاره لانهائية أيضاً. وجادل أن «القول إن الأشياء اللانهائية تجاوزت معرفة الإله يقود إلى حفرة المعصية والضلال، والقول إن الإله لا يعرف كل الأعداد... أيُّ مجنون يقول مثل ذلك؟... أي بؤساء نحن لنجرؤ على الحد من معرفته؟»[6].

سنعود إلى هذا الموقف الحديث للغاية في القسم الأخير من هذا الفصل. لم يذهب المفكرون اللاحقون في العصور الوسطى أبعد من أوغسطين، وعلى الرغم من تعريفهم للامحدود بأنه الإله، إلا أنهم لم يكونوا مستعدين لمنح هذا المفهوم لأي من مخلوقات الإله. في كتابه «الخلاصة اللاهوتية»[7]، يعطي توما الأكويني نوعاً من الأدلة الأرسطية بأنه «على الرغم من القوة اللامحدودة للإله، فإنه لا يمكن أن يفعل شيئاً لا محدوداً بالمطلق، لأن هذا ينطوي على تناقضات إن صحَّ الأمران في الوقت ذاته»[8]. ومع أن حجته تبدو أنيقة، إلا أنها تقع في الاستدلال الدائري: فهي تحاول إثبات أن مفهوم اللامحدود متناقض من خلال الانزلاق في الافتراض الأساس بأن «الشيء» محدود بطبيعته.

وهكذا، باستثناء أوغسطين وقليل آخرين، لم يكن مفكرو العصور الوسطى مستعدين للتعامل مع لانهائية أي كيانات أخرى غير الإله، سواء

4- Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* (Abraham Fraenkel and Ernst Zermelo, eds., Berlin: Springer Verlag, 1932), p. 404.

5- Plotinus, *Enneads*, V.5.11 (Boston: C. T. Branford, 1949).

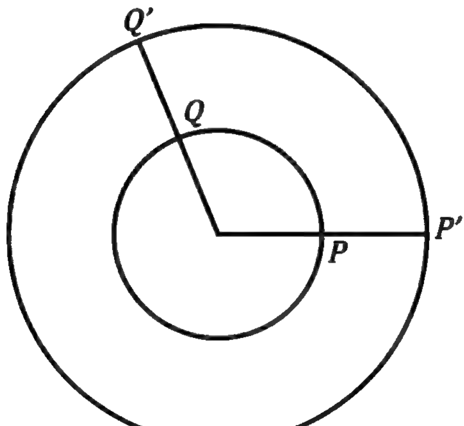
6- Saint Augustine, *City of God*, XII. 18 (New York: E. P. Dutton, 1947).

7- *Summa Theologiae* by Thomas Aquinas.

8- Saint Thomas Aquinas, *Summa Theologiae*, Ia, 7, 2–4 (London: Blackfriars, 1944).

كانت مادية أو نفسية أو مجردة بحتة. يمكن النظر للغز الشهير «ما عدد الملائكة الذين يمكنهم الرقص على رأس دبوس؟» على أنه سؤال عن العلاقة بين الخالق اللانهائي والعالم النهائي. جوهر هذه المسألة أنه من ناحية، بما أن الإله لانهائي القدرة، فيمكن أن يخلق عدداً لانهائياً من الملائكة يرقصون على رأس دبوس؛ ومن ناحية أخرى، كان مفكرو العصور الوسطى يعتقدون بأن ما لمجموعة لانهائية أن تنشأ في العالم المخلوق.

إن براهين مفكري العصور الوسطى على أن اللانهاية فكرة متناقضة ذاتياً خطأ كلها، لكنهم أدركوا أيضاً مفارقة مثيرة للاهتمام عن اللانهاية. إن أي خط يحوي عدداً لانهائياً من النقاط. وبما أن محيط دائرة قطرها 2 هو ضعف محيط دائرة قطرها 1، فيجب أن يضم محيط الدائرة الأولى لانهاية من النقاط أكبر من لانهاية نقاط الدائرة الثانية. لكن رسم الدائرتين يُظهِر أن كل نقطة P من الدائرة الصغيرة تقابل نقطة واحدة بالضبط P' من الدائرة الكبيرة، وكل نقطة Q' من الدائرة الكبيرة تقابل نقطة واحدة بالضبط Q من الدائرة الصغيرة. وبالتالي يظهر لدينا لانهايتان مختلفتان ومتساويتان في الوقت نفسه.



الشكل 3

في أوائل القرن السابع عشر، قدَّم غاليليو غاليليه حلاً غريباً لهذه المشكلة. اقترح غاليليو أن من الممكن تحويل محيط الدائرة الأصغر إلى محيط الدائرة

الأكبر بإضافة عدد لانهائي من الفجوات اللامتناهية في الصغر. وكان مدرِكاً أن حلاً كهذا يضيف صعوبات مختلفة إلى المسألة، بقوله: «هذه الصعوبات حقيقية؛ وليست الوحيدة فحسب. لكن لنتذكَّر أننا نتعامل مع لانهايات وما هو غير قابل للتجزئة، وكلاهما يتجاوز فهمنا المحدود، الأول بسبب كِبَره والثاني بسبب صِغره. وبالرغم من ذلك، لا يتوقف الناس عن مناقشتها، مع أن ذلك يستلزم طريقة غير مباشرة»[9].

اقترح غاليليو حلاً لبعض هذه الصعوبات بتأكيده أنها تظهر «عندما نحاول أن نناقش اللانهائي بعقولنا النهائية، ونخصُّه بخصائص المحدود والمعروف النهائية؛ لكني أعتقد أن هذا خطأ، فليس بإمكاننا وصف كميات لانهائية على أنها أكبر أو أصغر أو تساوي إحداها الأخرى»[10]. يدعم هذا التأكيد الأخير مثال يُدعى مفارقة غاليليو.

إن معظم الأعداد الطبيعية ليست مربعات تامة لأعداد أخرى، لذا فمجموعة المربعات التامة أصغر من مجموعة الأعداد الطبيعية؛ هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى، نظراً لأن كل عدد طبيعي هو الجذر التربيعي لمربع تام واحد، فإن مجموعة المربعات التامة يجب أن تكون مساوية لمجموعة الأعداد الطبيعية. توصَّل غاليليو من هذه المفارقة إلى أنه «لا يسعنا إلا الاستنتاج بأن مجموعة جميع الأعداد لانهائية، وأن مجموعة المربعات التامة لانهائية...؛ فلا مجموعة المربعات أقل من مجموعة الأعداد، ولا الأخيرة أكبر من الأولى. وأخيراً، لا تنطبق سمات القلَّة والكثرة والمساواة على اللانهايات، بل على الكميات المحدودة فحسب»[11].

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49\ \ldots
\end{array}
$$

اقتبستُ قول غاليليو بشيء من التفصيل لأنه يحمل أولى علامات

9- Galileo Galilei, *Two New Sciences* (Henry Crew and Alfonso De Salvio, trans., New York: Macmillan, 1914), p. 26.

10- المرجع نفسه، ص 31.

11- المرجع نفسه، ص 32.

الموقف الحديث اتجاه اللانهاية الفعلية في الرياضيات. إذا لم تسلك المجموعات اللانهائية سلوك المجموعات النهائية، فلا يعني ذلك أن اللانهاية مفهوم متناقض وغير متَّسق؛ بل يعني أن الأعداد اللانهائية تتبع «علم حساب» مختلفاً عن الأعداد المحدودة. وإذا كان استخدام المفاهيم العادية مثل «متساوٍ» و«أقل من» على المجموعات اللانهائية يؤدي إلى تناقضات، فهذا ليس دليلاً على أن المجموعات اللانهائية لا يمكن أن توجد، بل يجب التفكير بدلاً من ذلك بأن هذه المفاهيم لا تُطبَّق على اللانهايات بدون تعديل. لم يصل غاليليو إلى كيفية تعديل هذه المفاهيم، فهذه كانت مهمة جورج كانتور بعد حوالي 250 سنة.

كان الدافع الأساس لمحاولة غاليليو التوصل إلى نوع من التعبير عن اللانهاية الفعلية هو رغبته بالتعامل مع المكان والزمان على أنهما كميات متغيرة باستمرار. وهكذا، يمكن التعبير عن تجربة الحركة بالصيغة $x=f(t)$، حيث x تمثِّل الموضع المكاني، وهو تابع للتغير المستمر للوقت . لكن المتغير t الذي يتزايد باستمرار من الصفر–مثلاً– إلى عشرة هو لانهائي، سواء بالمعنى اليوناني للكلمة التي تدلّ على العشوائية أو بمعنى الكِثرة اللامتناهية.

أدَّت هذه النظرة للموضع المكاني على أنه تابع لتغيّر الوقت إلى إشكالية، والتي ساعدت بدورها في تأسيس حساب التفاضل والتكامل في أواخر القرن السابع عشر. كانت الإشكالية هي تحديد السرعة الآنية لجسم متحرك، والذي تُعطى المسافة من نقطة انطلاقه إلى موضعه المحدد بدلالة تغير الوقت $f(t)$.

اتضح أنه لحساب السرعة عند لحظة ما t_0، علينا أن نتخيل قياس السرعة على فواصل زمنية لامتناهية في الصغر d_t. ويمكن إيجاد السرعة $f(t_0)$ في اللحظة t_0 من خلال المعادلة:

$$(f(t_0+d\,d_t)-f(t_0)/d_t)$$

التي نتعلمها في السنة الأولى من دراستنا لحساب التفاضل والتكامل.

تُدعى الكمية d_t «لامتناهية الصِّغَر»، وتتبع عدداً من القواعد الغريبة. فإذا

أُضيفت إلى عدد عادي، يمكن تجاهلها ومعاملتها معاملة الصفر. لكن من ناحية أخرى، تُعتبر مختلفة عن الصفر بما يكفي لاستخدامها كمقام لكسر. فهل d_t صفر أم لا؟ إن نتيجة جمع عدد نهائي من اللامتناهيات في الصِّغَر هي كمية لامتناهية في الصِّغَر أيضاً. لكن جمع عدد لانهائي منها يعطي إما عدداً ترتيبياً[12] أو كمية لامتناهية في الكِبَر.

رأى الأسقف بيركلي[13] أن من الغريب أن يسارع علماء الرياضيات لتصديق نظرية نيوتن-ليبنز عن اللامتناهي في الصِّغَر، وفي الوقت ذاته يترددون أمام خصوصية العقيدة المسيحية الأرثوذكسية. وكتب عن ذلك عام 1734، عملاً حمل عنوان «المحلِّل»[14]، وعنواناً فرعياً طويلاً: *«خطاب موجَّه إلى عالِم رياضيات ملحد. وفيه يُبحث ما إذا كان موضوع التحليل الحديث ومبادئه واستدلالاته أكثر صراحة في التخيل، أو أكثر وضوحاً في الاستنتاج، من الألغاز الدينية ونقاط الإيمان. «أَخْرِجْ أولاً الخَشَبَةَ مِنْ عَيْنِكَ، وَحِينَئِذٍ تُبصِرُ جَيِّداً أَنْ تُخْرِجَ القَذَى مِنْ عَيْنِ أَخِيكَ»*[15].

استُبدِل استخدام الأعداد اللامتناهية في الصِّغَر والأعداد اللامتناهية في الكِبَر سريعاً في حساب التفاضل والتكامل بطريقة النهاية (limit). لكن

12- العدد الترتيبي هو عدد لانهائي، وسنناقشه في الفصل الثاني، قسم الأعداد فوق المنتهية. (المترجمة).

13- جورج بيركلي، الشهير بلقب «الأسقف بيركلي»، (1685-1753). هو فيلسوف إيرلندي اشتُهر بتطوير نظرية «اللامادية»، والتي تُعرف أيضاً بـ «المثالية الذاتية». تنكر هذه النظرية وجود الجوهر المادي، وتؤكد أن الموجودات ما هي إلا أفكار في عقول من يدركونها حسياً، وبالتالي لا توجد الأشياء بدون أن تُدرك. (المُترجمة).

14- *The Analyst* by George Berkeley.

15- أُعيدت طباعة *The Analyst* في الجزء الثالث من Alexander Campbell Fraser, ed., *The Works of George Berkeley* (Oxford: Clarendon Press, 1901), p. 1.

وأُعيدت أيضاً في هذا الجزء طباعة: *Siris: A chain of Philosophical Reflexions and Inquiries concerning the virtues of Tar-water, and divers other subjects connected together and arising one from another.*

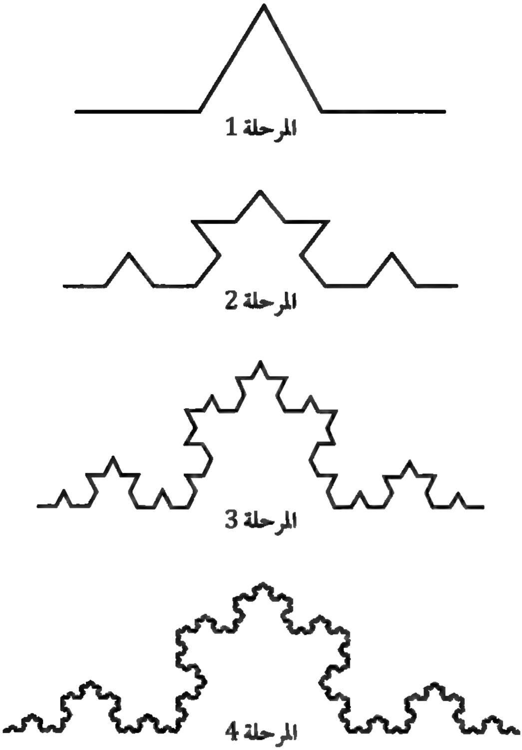
وماء القطران هو منشِّط ينتج عن خلط الماء مع المادة الصمغية القطرانية المستخرجة من شجر الصنوبر. وكان بيركلي يعتقد أن هذه المادة هي الدواء الشافي لكل الأمراض.

لم يتطور علم التفاضل والتكامل بسرعة إلا مع استعداد علماء الرياضيات للتفكير في اللانهايات الفعلية. في السنوات الخمس عشرة الماضية، أنتج «أبراهام روبنسون» بتطويره التحليل غير القياسي تقنيةً يمكن من خلالها استخدام اللامتناهي في الصِّغَر بدون خوف من الوقوع في تناقض. تتضمن تقنية روبنسون توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لمجموعة الأعداد الحقيقية الفائقة، والتي ستُشرح في الفصل الثاني.

بعد إدخال طريقة النهاية، أصبح علم التفاضل والتكامل قابلاً للتطور لفترة طويلة بدون الحاجة لاستخدام كميات لانهائية فعلياً. ولكن عندما حاول علماء الرياضيات الحصول على وصف دقيق للاستمرارية أو لمستقيم حقيقي، اتضح أنه لا يمكن تجنُّب اللانهاية في أسس الرياضيات بدون الوقوع في ضلال كبير. ومع ذلك، لا يزال علماء الرياضيات يترددون في الخوض في عالَم اللانهاية الفعلية، حيث يمكن لحجم مجموعة ما أن يكون بحجم مجموعة فرعية منها، ويمكن لمستقيم ما أن يحوي نقاطاً بعدد نقاط مستقيم بنصف طوله، ويمكن للعمليات اللانهائية أن تُعامل على أنها منتهية.

كان جورج كانتور هو من أنشأ أخيراً، في أواخر القرن التاسع عشر، نظرية اللانهاية الفعلية التي هدمت باتساقها وتماسكها الواضح «البراهين» الأرسطية والمدرسية التي تنفي وجود نظرية مثلها. وعلى الرغم من أن كانتور كان باحثاً شاملاً كتب لاحقاً بعض الدفاعات الفلسفية المهمة عن اللانهاية الفعلية، إلَّا أن نقطة دخوله كانت مشكلة رياضية تتعلق بأحادية تمثيل التابع كسلسلة مثلثية.

للتعرف على الصفة المميزة للتفسير الذي قدَّمه كانتور، لنفكر في بنية منحنى «كوخ» الموضَّح في الشكل (4). أُوجد هذا المنحنى ليكون النهاية التي تسعى إليها متتالية لامتناهية من التقريب. التقريب الأول هو قطعة من خط مستقيم (المرحلة 0)، ثم يُستبدَل الثلث الأوسط من هذه القطعة بقطعتين طول كل منهما يساوي نصف الثلث، بشكل ضلعين لمثلث متساوي الأضلاع (المرحلة 1)؛ وفي كل مرحلة تالية، يُستبدَل الثلث الأوسط بضلعين لمثلث متساوي الأضلاع.



الشكل 4

الآن، إذا اعتبرنا أن من الممكن الوصول إلى اللانهاية، على نحو ما، فسنعتبر أن النهاية التي تسعى إليها هذه العملية اللانهائية هو منحنى موجود بالفعل؛ إن لم يكن في الفضاء المادي، فعلى الأقل ككائن رياضي. ناقش «بينوا ماندلبروت» في كتابه «الكُسيريات»[16] منحنى «كوخ» باستفاضة، وفيه يفسِّر لِمَ يمثِّل منحنى «كوخ» في لانهائيته النموذج الأفضل لرسم خط ساحلي أكثر من أي منحنى تقريبي آخر[17].

16- *Fractals* by Benoit Mandelbrot. (المترجمة).

17- Benoit Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension* (San Francisco: W. H. Freeman, 1978), p. 36.

توصَّل كانتور أيضاً إلى نتائج عدّة مثيرة للاهتمام حول المجموعات اللانهائية الفعلية، وأبرزها أن مجموعة النقاط على خط مستقيم حقيقي تشكل لانهاية أكبر من مجموعة الأعداد الطبيعية. وبذلك أظهر كانتور أن اللانهاية ليست مفهوماً عن الكل أو العدم، بل: هناك درجات من اللانهاية.

تجاوز كانتور بهذه الحقيقة المفهوم البسيط للانهاية، الذي يقول: هناك لانهاية واحدة فحسب، وهي غير قابلة للوصول وليست حقيقية تماماً. ومع احتفاظ كانتور بهذا المفهوم، الذي سمَّاه «اللانهاية المطلقة»، إلَّا أنه سمح للعديد من المستويات بين المنتهي واللانهاية المطلقة. وتتوافق هذه المستويات البينية مع نظريته عن *الأعداد فوق المنتهية*... وهو المصطلح الذي صاغه كانتور للأعداد اللانهائية والتي تكون مع ذلك قابلة للتصور.

في القسم التالي، سنناقش إمكانية العثور على مجموعات فوق منتهية فيزيائية موجودة فعلاً. ثم سنبحث عن الطرق التي قد توجد بها مثل هذه اللانهايات عقلياً. وسنتحدث أخيراً عن المطلق، أو اللانهاية الماورائية.

يعود هذا التقسيم الثلاثي إلى كانتور، الذي ميَّز بين اللانهاية المطلقة، واللانهايات الفيزيائية، واللانهايات الرياضية:

«تظهر اللانهاية الفعلية في ثلاث حالات: أولاً، عندما تُدرَك في الشكل الأكثر اكتمالاً، في كائن مستقل من عالَم آخر، والذي أسمِّيه اللانهائي المطلق، أو ببساطة «المطلق»؛ ثانياً، عندما توجد في العالَم المخلوق المشروط؛ ثالثاً، عندما يفهمها العقل بتجرُّد كمقدار رياضي أو عدد أو نمط ترتيبي. أودّ هنا أن أجعل التباين واضحاً بين المطلق وما أدعوه فوق المنتهي، وأقصد به اللانهائي الفعلي من النوعين الأخيرين، المحدودين بوضوح، لأنهما عرضة للمزيد من الزيادة، مما يجعلهما عُرضة للمحدودية»[18].

هذا الكتاب رائع ومشهور. وتعتمد الأداة التقنية الرئيسة فيه على طريقة لتعيين قيمة بُعد جزئية لكائنات مثل منحنى كوخ، الذي بُعده log4 /log3، أي ما يساوي تقريباً 1.26.

18- Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen, p. 378.

اللانهايات الفيزيائية[19]

هناك ثلاث طرق يبدو فيها عالمنا لامحدوداً، وبالتالي لانهائياً. يبدو الزمن لانهائياً، ويبدو الفضاء (المكان) لانهائياً، ويبدو أيضاً أن أي فاصل زمني أو مكاني قابل للتقسيم والتجزئة إلى ما لانهاية. سنبحث في هذه اللانهايات الفيزيائية الظاهرة في ثلاثة أقسام فرعية.

اللانهايات الزمنية

لنفرض أن الجنس البشري لن ينقرض أبداً- أي إن كل جيل سيتبعه جيل آخر. ألن نضطر عندها للاعتراف بأن عدد أجيال الإنسان لانهائي؟

19- إن قسم اللانهايات الفيزيائية كله طُبع سابقاً كبحث «Physical Infinities», *Speculations in Science and Technology* 1, (April, 1978), pp. 43-58.
وهنا أقدِّم جزيل الشكر لـوليام م. هونيغ، رئيس تحرير المجلة، لهذا الدعم والتشجيع.

حاجج أرسطو ضد هذا الاستنتاج، مؤكداً أنه في هذه الحالة لن تكون لانهائية عدد الأجيال سوى لانهاية محتمَلة، لأنها لانهائية بمعنى أنها لا تنضب فحسب. وأكَّد أنه في أي فترة زمنية مُعطاة، لن يكون هناك سوى عدد محدود من الأجيال، ولا يجوز أن يُؤخذ المستقبل بأكمله كوحدة مستقلة تحتوي عدداً لانهائياً من الأجيال.

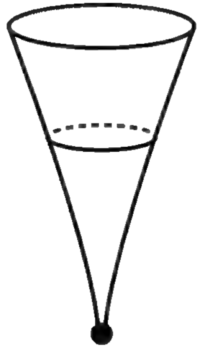
في رأيي أن هذا الفارق الذي تحدث به أرسطو يعتمد على نظرة قديمة للزمن فقدت مصداقيتها بعد الفيزياء النسبية الحديثة. ولكي نتفق معه أنه على الرغم من عدم وجود جيل أخير فلا توجد مجموعة لانهائية لجميع الأجيال، يجب أن نعتقد أن المستقبل لا يوجد كشيء ثابت ومحدد؛ فلو كان المستقبل موجوداً ثابتاً، فستوجد كل الأجيال المستقبلية العديدة «دفعة واحدة».

لكن إحدى النتائج الرئيسة لنظرية أينشتاين «النسبية الخاصة» هي أن نسيج الزمكان هو الأساس، وليس المكان معزولاً لوحده ويتطور مع مرور الزمن. لن أجادل هذه النقطة بالتفصيل هنا، لكني سأكرر أن النظرية الفيزيائية الحديثة تقدِّم لنا الأسباب الكافية للاعتقاد بأن مرور الزمن محض وهم؛ فالماضي والحاضر والمستقبل توجد كلها معاً في نسيج الزمكان.

لذا لا يمكن تفادي مسألة لانهائية الزمن بإنكار أن الزمن بُعد ثابت كما المكان؛ فالسؤال يبقى: هل الزمن لانهائي؟ أي إننا إذا أخذنا بالاعتبار زمكان الكون كله، فهل بُعد الزمن يمتد إلى ما لانهاية أم لا؟

قبل خمسين، أو حتى عشرين عاماً، كان من الطبيعي أن نؤكد أن ليس لكوننا بداية ولا نهاية، وبالتالي فإن الزمن لا محدود من الجهتين. لكن مؤخراً، أصبح من الحقائق الثابتة أن للكون بداية تُعرف باسم «الانفجار العظيم»، والذي حصل منذ حوالي 15 مليار سنة. في ذلك الوقت كان كوننا بحجم نقطة، وهو يتوسع منذ ذلك الحين. ما الذي حدث قبل «الانفجار العظيم»؟ يمكن الإجابة بـ «لا شيء». يتمّ تجنب المفارقة الواضحة المتمَّثلة في وجود لحظة زمنية أولى بالقول إن «الانفجار العظيم» لم يحدث في زمن... وأن بُعد الزمن مفتوح، بدلاً من أنه مغلق بنقطة بداية في الماضي.

هذا فرق فيه فِطنة وفائدة معاً. إذا فكرنا بأن جميع نقاط خط الزمن أكبر أو تساوي الصفر، فهناك لحظة أولى: الصفر. لكن إذا فكرنا أن جميع النقاط أكبر تماماً من الصفر، فلن تكون هناك لحظة أولى. وعندها يكون لأي قيمة لحظة زمنية t أكبر من الصفر، توجد لحظة زمنية تسبقها، هي $t|2$، أكبر من الصفر أيضاً.



الانفجار العظيم

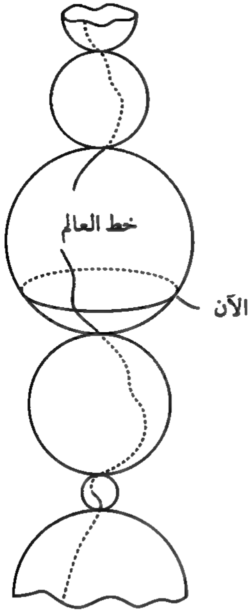
الشكل 5

لكن على أي حال، إذا فكرنا في الزمن على أنه لم يكون موجوداً قبل «الانفجار العظيم»، فبالتأكيد ليس عدد سنوات ماضي الكون لانهائياً. وماذا عن المستقبل؟ لا يوجد إجماع علمي على جواب ذلك. يرى العديد من علماء الكون أن كوننا سيتوقف أخيراً عن التمدد وينهار ليشكل ثقباً أسود عظيماً واحداً، يسمُّونه «التوقف العظيم» أو «الانفجار العظيم العكسي»، بينما يرى آخرون أن توسع الكون سيستمر إلى ما لانهاية.

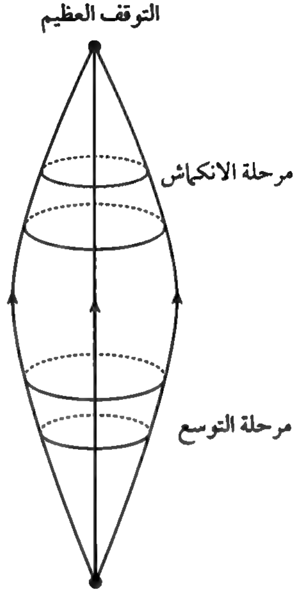
إذا كان الكون يبدأ حقاً كنقطة ويتوسع، ثم ينكمش وينتهي كنقطة، فهل من المنطقي القول إنه لا وجود للزمن باستثناء الفترة الفاصلة بين هاتين النقطتين؟ ما الذي يوجد قبل البداية وبعد النهاية؟

إحدى الإجابات هي أن الكون نظام متذبذب يمرّ مراراً وتكراراً في

دورات من التوسع والانكماش. تعيدنا هذه الإجابة إلى الزمن اللانهائي، ولكن يمكن تجنب ذلك.



الشكل 7



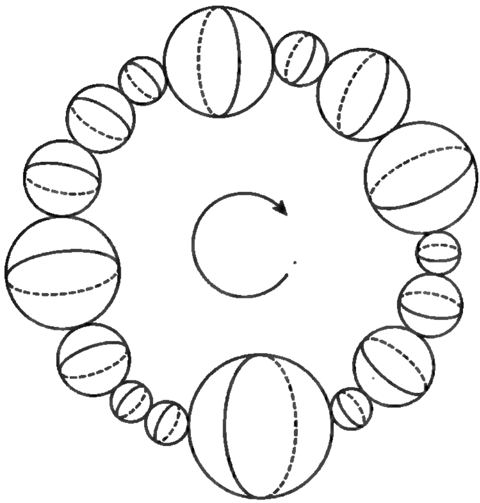
الشكل 6

إن الطريقة التي يمكن فيها تجنب مفهوم الزمن اللانهائي في كون يتذبذب إلى ما لانهاية هي تبنِّي الاعتقاد بـ«العود الأبدي»؛ وهو الاعتقاد بأن الكون يعيد نفسه. تقوم هذه الفكرة على أن الكون المحدود يجب أن يعود إلى الحالة نفسها بين الحين والآخر، وعند ظهور الحالة نفسها، يكون التطور المستقبلي هو نفسه الذي حصل سابقاً. ويعادل مبدأ العود الأبدي الافتراض أن الزمن عبارة عن دائرة واسعة. ويظهر تمثيل للكون المتذبذب مع الزمن الدائري في الشكل 8.

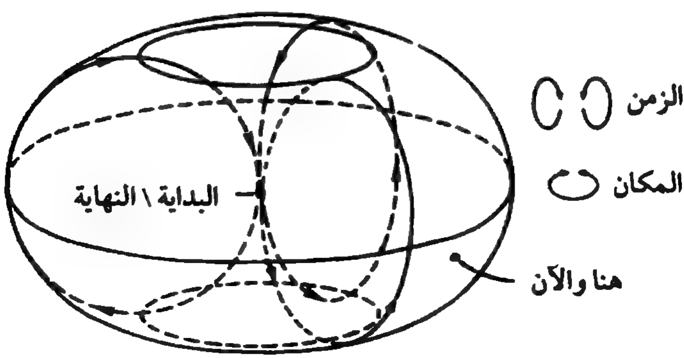
في نموذج أبسط للكون المتذبذب مع الزمن الدائري، لدينا ما يمكن تسميته «الزمكان الحلقي». في هذا النموذج، يكرر الكون المتذبذب نفسه

بعد كل دورة. ويُحدد هذا النموذج بنقطتين، «الانفجار العظيم» و«التوقف العظيم»، كما في الشكل 9.

مع ذلك، يمكننا أن نلاحظ أن الكون لن يتمكن من تكرار نفسه أبداً إذا كان يتوسع حقاً إلى الأبد، لأن متوسط المسافة بين المجرات ستكون كمية متزايدة باستمرار لا تعود أبداً إلى القيمة نفسها.



الشكل 8



الشكل 9

اللانهايات المكانية

نتنقل الآن للنظر في إمكانية وجود اللانهايات المكانية. يُستخدم أحياناً الفرق بين اللانهاية المحتمَلة واللانهاية الفعلية في الإجابة على هذا التساؤل. يجادل إيمانويل كانط، على سبيل المثال، أنه لا يمكن للعالَم أن يكون مجموعة لانهائية من الأشياء الموجودة لأن «تصور العالَم - الذي يملأ المكان كله كوحدة كلية- يتطلب أن ننظر إلى التوليف المتتالي لأجزاء العالم اللانهائي على أنه مكتمل؛ أي يجب النظر إلى الزمن اللانهائي على أنه منقضٍ أثناء تعداد كل الأشياء الموجودة»[20] .

يرى كانط أن الفضاء، إلى حدٍّ ما، ليس موجوداً بالفعل، فالأشياء توجد معاً في الفضاء عندما يدركها العقل فحسب. إذا قبلنا ذلك، فمن الصحيح إذاً أن الفضاء اللامتناهي هو شيء لا يمكن للعقل المحدود معرفته بعد أي فترة زمنية محدودة. لكننا نشعر أن العالم موجود ككل بالفعل، قبل بذل أي جهد من جانبنا لنراه على هذا النحو. وإذا أخذنا كل الزمكان، فبالتأكيد يحق لنا أن نسأل ما إذا كان الامتداد المكاني للزمكان لانهائياً أم لا.

قدَّم لوكريتيوس في قصيدته «في طبيعة الأشياء»[21] الحجة الكلاسيكية للانهائية الفضاء للمرة الأولى: «لنفترض للحظة أن الفضاء كله محدود وأن شخصاً ما شقَّ طريقه إلى حدوده القصوى وقذف سهماً»[22]. إن نتيجة ذلك هي إمَّا أن يصل السهم إلى ما وراء الحدود، وفي هذه الحالة لا حدود للفضاء؛ أو سيوقف الحد السهم، وفي هذه الحالة هناك شيء ما وراء الحد، مما يعني أن هذه الحدود المزعومة ليست في الحقيقة نهاية الكون.

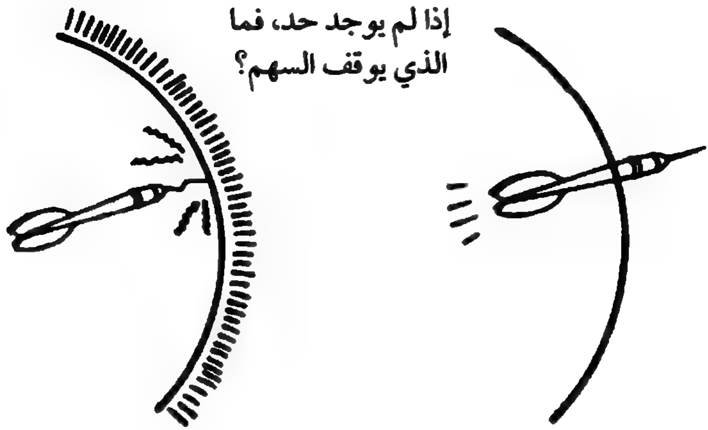
لكن النفور من اللانهاية كان كبيراً، لدرجة أن بارمينيدس وأفلاطون وأرسطو كانوا جميعاً يعتقدون أن مساحة الكون محدودة ومنتهية، وأن له

20- Immanuel Kant, *The Critique of Pure Reason*, First Antinomy (Norman Kemp Smith, trans., New York: St. Martin's Press, 1964), pp. 396-398.

21- De Rerum Natura by Lucretius.

22- Lucretius, *On the Nature of the Universe* (Ronald E. Latham, trans., Harmondsworth, England: Penguin Books, 1951), p. 55.

شكل كرة هائلة. وعند السؤال عما يكمن خارج هذه الكرة، أكّد أرسطو أن «ما هو محدود، لا يُحَدُّ بشيء يحيط به»[23].



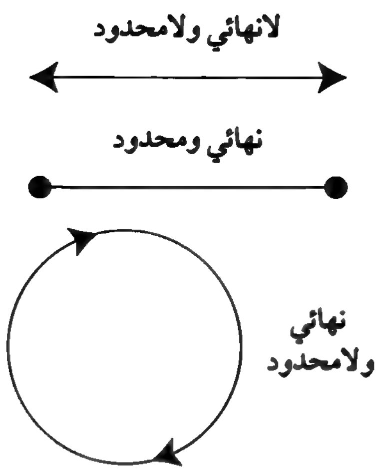
الشكل 10

في العصر الحديث، تمّ بالفعل تطوير طريقة لجعل ادعاء أرسطو أكثر منطقية. أدرك لوكريتيوس أن نقطة الضعف في الفرض القائل بأن الفضاء عبارة عن كرة منتهية هي وجود حدود معينة. لكن هناك طريقة نشكّل فيها بنية ثلاثية الأبعاد منتهية ولا تحتوي على نقاط حدية: خُذ ببساطة السطح الخارجي لكرة، مساحة كهذه لا حدود لها مع أنها منتهية.

لفهم كيف يمكن لشيء أن يكون بلا حدود ولكنه منتهٍ، يمكنك أن تفكر في دائرة. ومثلاً، يمكن لذبابة أن تطير حول حافة كأس بدون أن تصل أبداً إلى حاجز أو نقطة للتوقف، لكنها ستعود دائماً لمكانها نفسه.

سطح الأرض أيضاً لا محدود ومنتهٍ في الوقت نفسه. يمكننا السفر طويلاً بدون أن يعترضنا حدّ... لكن إن سافرنا بعيداً بما فيه الكفاية، فسنعود من حيث بدأنا.

Aristotle, *Physics*, III.8.208a, p. 57. –23



الشكل 11

نعرف الآن أن سطح الأرض الثنائي الأبعاد منتهٍ لكنه لا محدود لأنه ينحني في الفضاء الثلاثي الأبعاد على شكل كرة. وبالطريقة ذاتها، يمكننا أن نتخيل فضاء كوننا الثلاثي الأبعاد ينحني في فضاء آخر رباعي الأبعاد على شكل كرة عظيمة. كان برنارد ريمان أول من أدرك هذا الاحتمال في عام 1854، مع أن هناك اعتقاداً تقليدياً بأن الكون كرة عظيمة. ويقول هذا الاعتقاد، الذي وصفه خورخي لويس بورخيس في مقاله «فَلَك باسكال العظيم»[24]، ما يمكن اختصاره بأن «الإله كرة معقولة، مركزها في كل مكان وحدودها في اللامكان»[25] ويُنسب هذا القول إلى الساحر الأسطوري

24- *The Fearful Sphere of Pascal* by Jorge Luis Borges.

25- Jorge Luis Borges, *Labyrinths* (New York: New Directions, 1962), pp. 189-192.

وبورخيس هو أحد أشهر المؤلفين الذين كتبوا عن اللانهاية. وذكرت في هذا الكتاب بعض أشهر قصصه عن هذا الموضوع. وأركِّز هنا على إحدى أهم كتاباته:

Avatars of the Tortoise», pp. 202-208».

يبدأ هذا المقال بمقطع يصلح ليكون تعريفاً لكتاب «اللانهاية والعقل»: «توجد فكرة تثير التخبُّط والفوضى أكثر من أي فكرة أخرى. ولا أقصد هنا الشيطان، صاحب

هرمس تريسمجيستوس. إذا كان الكون بالفعل كرة عظيمة، فمن الدقة والإتقان اعتباره كرة مركزها في كل مكان وحدودها في اللامكان.

لفهم ذلك، ضع في اعتبارك حقيقة أنه يمكن تغطية مساحة كرة الفضاء العظيمة من خلال البدء في أي نقطة والسماح للكرة بالتوسع للخارج. لكن الأمر المثير للفضول أنه إذا سمحنا لكرة بالتوسع في الفضاء، فهناك مكان يتحول فيها محيط الكرة إلى نقطة ويختفي. يمكننا إدراك هذه الحقيقة من خلال الوضع المماثل لخطوط العرض الدائرية على السطح الكروي للأرض، والتي تتحول إلى نقطة في كلا القطبين الشمالي والجنوبي[26]. ويظهر هذا الخط الفكري عند دانتي في الجزء الأخير من الكوميديا الإلهية «الفردوس»[27].

اعتقد أرسطو أن العالم عبارة عن تسع كرات بلورية مجوَّفة تدور حول مركز هو الأرض. وتُدعى آخر هذه الكرات «المدار الرئيسي»، والذي يقع خارج الكرة التي ثُبِّتت النجوم عليها (بخلاف الشمس المُثبتة بسطح الكرة الرابعة). في «الفردوس»، تقود بياتريس دانتي عبر الفضاء، ويمرّ بالكرات التسع للعالم: القمر، عطارد، الزهرة، الشمس، المريخ، المشتري، زحل، النجوم الثابتة، المدار الرئيسي. وراء هذه الكرات التسع توجد تسع كرات من الملائكة، تقابل كرات العالم التسع. ووراء كرات الملائكة التسع توجد نقطة تُدعى السماء أو «عرش الإله»، وهي دار الإله.

الأمر المحيِّر في الكون عند دانتي، كما هو موَّضح في الشكل 12، أن «عرش الإله» لا يبدو كنقطة، بل كأنه كامل الفضاء ويحيط بالكرة الأخيرة من كرات الملائكة. لكن يمكن حلّ ذلك بأن نعتبر الفضاء كرة عظيمة!

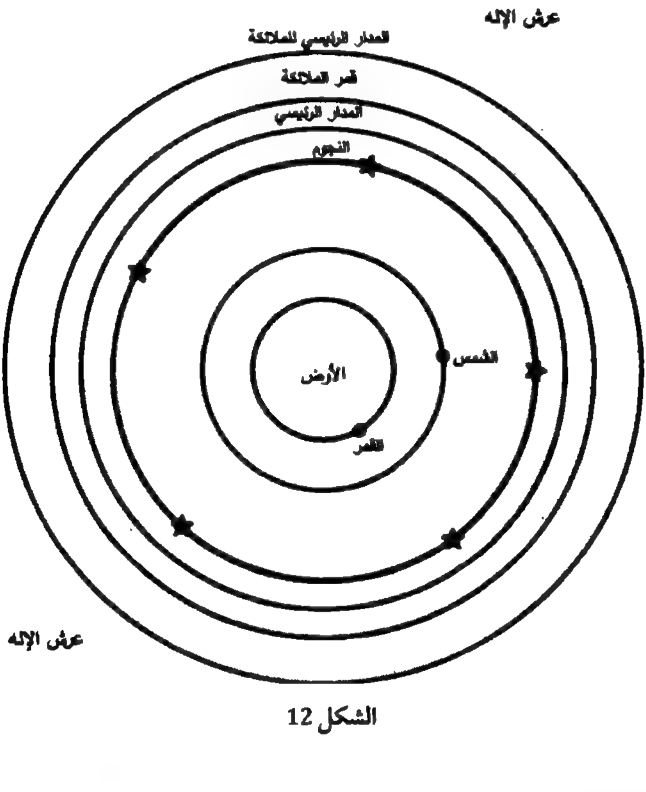
المملكة التي تنتهي حدودها عندما تبدأ الفضيلة؛ بل أقصد فكرة أقوى، إنها «اللانهاية».

26- Rudolf v.B. Rucker, *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension* (New York: Dover Publications, 1977), p. 39.

انظر أيضاً: Rudy Rucker, «On Hyperspherical Space and Beyond,» *Isaac Asimov's Science Fiction Magazine* (November, 1980), pp. 92-106.

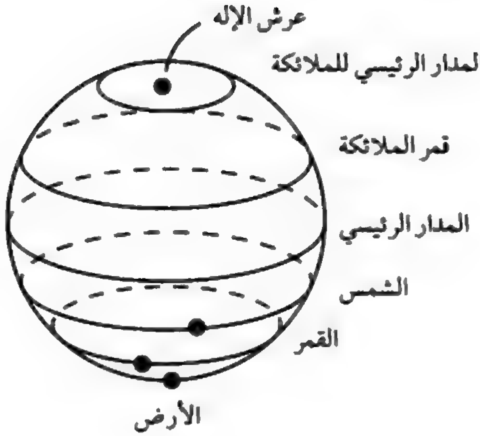
27- Dante Aligheieri, *The Divine Comedy*, Paradisio, Canto 33 (Charles S. Singleton, trans., Princeton University Press, 1975), pp. 380-381.

في الشكل 13، قمتُ برسم النموذج الذي نحصل عليه إذا رسمنا كون دانتي على ورقة (ثنائية البُعد) وقمنا بحنيها على شكل كرة (ثلاثية البُعد)، عندها يمكن أن يبدو العرش كنقطة. وبالطريقة ذاتها يمكن أن نتصور تحول النموذج الثلاثي الأبعاد في الصورة الأولى إلى مساحة منتهية ولا محدودة كما في الصورة الثانية إذا انثنى الكون الثلاثي الأبعاد على نحو يضغط كل الفضاء خارج سطح الكرة إلى نقطة واحدة[28]. في الشكل 14 يظهر نقش Dore للعرش محاطاً بكرات الملائكة.



الشكل 12

28- كان أول من اقترح قراءة دانتي بهذه الطريقة هو أندرياس سبيزر، وقُدِّمت في:
J. J. Callahan's excellent article, «The Curvature of Space in a Finite Universe», *Scientific American* (August, 1976).



الشكل 13

الشكل 14

لم يحصل تطوير مهم لهذا التصور عن الكرة العظيمة للفضاء حتى منتصف القرن التاسع عشر. كان هناك قبول عام وغير ناقد لرؤية أرسطو للكون في العصور الوسطى، لكن بدون كرات دانتي الملائكية.

أصرَّ لوكريتيوس على أن الفضاء لانهائي، وكان هناك العديد من المفكرين الآخرين، مثل نيكولاس من كوسا وجيوردانو برونو، الذين آمنوا بلانهائية الفضاء. احتفظ البعض بالنظام الأرسطي للعالم، لكنهم اقترحوا أن هناك العديد من الأنظمة التي تدور في الفضاء؛ واختار آخرون أن يعتقدوا بنظام فضفاض وأكثر مرونة، تختلط فيه النجوم والكواكب عشوائياً في فضاء لانهائي.

دافع برونو بقوة عن وجهات النظر هذه في كتاباته، وخاصة في كتابه «عن الكون اللانهائي والعوالم» عام 1584[29]. تجوّل برونو خلال حياته بحرية في جميع أنحاء أوروبا، ودرَّس مذهبه في الكون اللامتناهي في العديد من مراكز التعليم. وفي عام 1591، أقنع ثريٌّ من مدينة البندقية برونو أن يأتي من فرانكفورت ليعلِّمه «فن الذاكرة والاختراع». وبعد وقت قصير من وصول برونو، ظهر الفخ الذي نُصِب له. كان مضيفه يعمل على نحو وثيق مع السلطات الكنسية التي اعتبرت برونو مهرطقاً كبيراً وصاحب بدعة، وسُلِّم إلى محاكم التفتيش. سُجن برونو لمدة تسع سنوات لكنه لم يتخلَّ عن معتقداته، وأُعدم في النهاية حرقاً في ساحة كامبو دي فيوري في روما. وكان ما حصل لـبرونو سبباً في حذر غاليليو في التعبير عن أفكاره العلمية التي تمسّ مواضيع تهمّ الكنيسة.

يمكن أن يُحَلَّ السؤال عما إذا كان فضاؤنا لانهائياً فعلاً أم لا في العقود القليلة القادمة. بافتراض أن نظرية الجاذبية لأينشتاين صحيحة، فهناك احتمالان أساسيان للكون: 1. كرة عظيمة (منتهية ولامحدودة) تتوسع ثم تنكمش إلى نقطة؛ 2. فضاء لانهائي يتوسع إلى الأبد. أعتقد أن الاحتمال الأول سيكون مقبولاً على نطاق واسع، لأن فكرة الفضاء اللانهائي المتوسع في كل اتجاه أمر مقلق للغاية. كما أن مصير الكون في الحالة

29- Giordano Bruno, *On the Infinite Universe and Worlds* (Dorothy Singer, translator, New York: Greenwood Press, 1968).

الأولى هو بالتأكيد أكثر إثارة للاهتمام، لأنه ينهار مرة أخرى إلى تفرُّد ذي كثافة زمكانية لامتناهية ليكون بمثابة بذرة لكون جديد كامل. أمَّا في الحالة الثانية، لدينا شموس تموت وتبرد منجرفة ومبتعدة عن بعضها البعض في اتساع لانهائي مظلم وفارغ تماماً... وفي النهاية لا يبقى سوى الجمر والرماد في ليل مطلق أبدي.

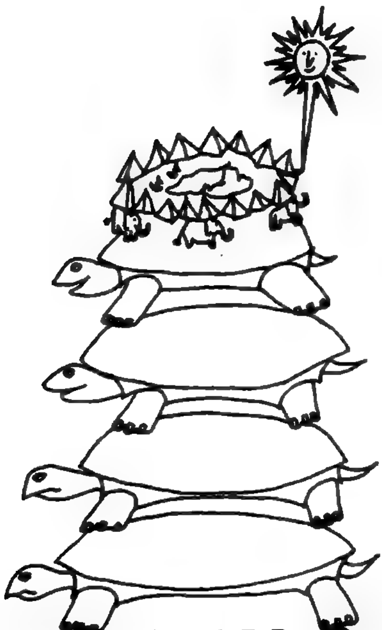
على الرغم من أني مؤيد للانهاية في الأساس، إلَّا أنني أتعاطف مع الكرة الكونية العظيمة. لكن هل من طريقة لإيجاد اللانهاية المكانية هنا؟ حسناً، ماذا عن فكرة الفضاء الرباعي الأبعاد الذي يمكن أن تطفو فيه كرتنا الكونية العظيمة الثلاثية الأبعاد؟ قد يرفض الكثيرون هذه الفكرة باعتبار الفضاء الرباعي الأبعاد مجرد خيال رياضي... أو طريقة غنية للتعبير عن الطبيعة المنتهية لكن اللامحدودة لكوننا. هذا الموقف السائد على نطاق واسع هو في الواقع نسخة أكثر تعقيداً من افتراض أرسطو بأن ما هو محدود لا يُحَدُّ بشيء خارجه.

ولكن ماذا لو اختار أحدنا الاعتقاد بأن الفضاء الرباعي الأبعاد الذي يمكن أن يحوي فضاءنا الثلاثي الأبعاد موجود حقاً؟ لنتخيل عالماً رباعي الأبعاد، ولنسمِّه مثلاً «الكون المزدوج». سيضمّ الكون المزدوج عدداً من الكرات العظيمة الطافية، وسيكون السطح العظيم لكل كرة عظيمة عبارة عن كون ثلاثي الأبعاد منتهٍ ولامحدود.

وهكذا، سيحتوي الكون المزدوج الرباعي الأبعاد على عدد من الأكوان ثلاثية الأبعاد، ولكن لا يمكن لأي من سكان هذه الأكوان الوصول إلى أي واحد من الأكوان الأخرى ما لم يتمكن من السفر بطريقة ما عبر الفضاء الرباعي الأبعاد. إذا أنقصنا عدد الأبعاد، سنرى أن هذا الاحتمال مشابه لكون ثلاثي الأبعاد يطفو فيه عدد من النجوم والكواكب، ويكون فيه أيضاً سطح كل نجم أو كوكب عبارة عن مساحة ثنائية الأبعاد منتهية ولامحدودة، مع عدم إمكانية أي أحد الانتقال من سطح كوكب إلى آخر إلا بالسفر عبر الفضاء الثلاثي الأبعاد.

اتباعاً للمبدأ الهرمسي «كما في الأعلى، كذلك في الأسفل»، قد نميل

للاعتقاد بأن الكون المزدوج الذي نحن فيه هو في الواقع فضاء منتهٍ لامحدود أيضاً، (سطح رباعي الأبعاد لكرة خماسية الأبعاد في فضاء خماسي الأبعاد أيضاً)، وأن هناك عدداً من هذه الكرات التي تسبح في عالم خماسي الأبعاد. يمكن لهذا أن يستمر إلى ما لانهاية. ويذكرنا ذلك بوصف شرقي قديم للعالم بأنه قرص محمول على ظهور أفيال، الأفيال تقف على ظهر سلحفاة، السلحفاة تقف على ظهر سلحفاة أكبر، والتي تقف على ظهر سلحفاة أكبر...

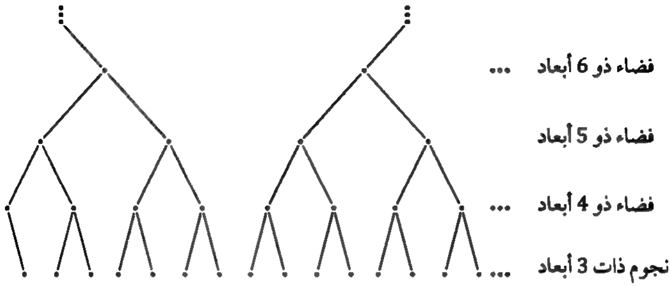


ETCETERA

الشكل 15

يمكننا أن نلاحظ أنه في النمط الأخير للكون، لا يوجد سوى كون واحد ثلاثي الأبعاد، وكون واحد رباعي الأبعاد، وهلُمَّ جرّاً. ولكن في نمط الكون اللامتناهي المرسوم في الشكل 16، لدينا عدد لانهائي من الأجسام في كل مستوى. ونلاحظ أيضاً أنه للانتقال من النجم A ثلاثي الأبعاد إلى النجم B

في فضاء آخر رباعي الأبعاد، على المرء أن يتحرك عبر فضاء خماسي الأبعاد. ومن الميزات الغريبة لأكوان كهذه، أنه على الرغم من وجود عدد لانهائي من النجوم، فلا يوجد فضاء واحد بأي بُعد يحوي نجوماً بعدد غير منتهٍ.



الشكل 16

إن ما يهمنا هنا هو السؤال عما إذا كان الفضاء لامتناهياً في الكِبَر. ويظهر لدينا ثلاثة خيارات للإجابة:

1. يوجد مستوى n يكون فيه الفضاء ذو البُعد n حقيقياً وممتداً إلى ما لانهاية. وتقع الحالة التي يكون فيها فضاؤنا الثلاثي الأبعاد لامتناهياً في الكِبَر ضمن هذا الخيار.
2. يوجد فضاء واحد ذو عدد n من الأبعاد، هذا الفضاء منتهٍ ولامحدود، ولا يوجد أي فضاء بعدد أبعاد أكبر منه $(n+1)$ حقيقي بالنسبة له. وتقع الحالة التي يكون فيها فضاؤنا الثلاثي الأبعاد منتهٍ ولامحدود، مع إنكار وجود فضاء رباعي الأبعاد يحتويه، ضمن هذا الخيار.
3. يوجد فضاءات حقيقية في كل بُعد، وكل منها منتهٍ ولامحدود. في هذه الحالة، إمَّا أن يوجد عدد لانهائي من الأكوان، أو أن نصل إلى مستوى يوجد بعده كون واحد ذو عدد أبعاد n لكل n.

إذاً، هل الفضاء لانهائي؟ يبدو أنه يمكننا التأكيد على أنه لانهائي إلى حدٍّ ما؛ أي تبنِّي موقف أرسطو بأن الفضاء منتهٍ عند مستوى معين لكن ما من شيء بعده؛ أو قبول الرأي القائل بأنه يوجد تسلسل لانهائي لمستويات الأبعاد. في الحالة الأخيرة، لدينا لانهاية نوعية (لانهاية عدد أبعاد الفضاء)، مع احتمال

لوجود أو عدم وجود لانهاية كمية من حيث الحجم، مثلاً للحجم الكلي لجميع الفضاءات الثلاثية الأبعاد المحتواة في الفضاء الرباعي الأبعاد.

اللانهائي في الصِّغَر

في هذا القسم الفرعي سنناقش وجود اللامتناهي في الصِّغَر، المعاكس للامتناهي في الكِبَر، والذي ناقشناه تواً. ويمكن أن نوضِّح ذلك في سؤالنا: هل يمكن أن نستمر بتقسيم شيء ما حتى نصل إلى لا شيء؟

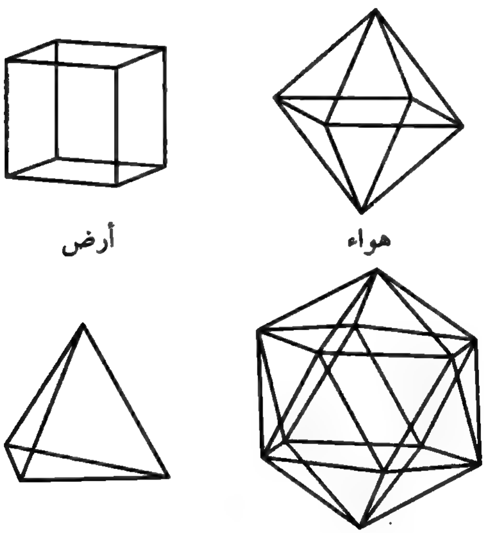
نظراً لأن طول النقطة لا يُقاس، فلا يمكن لعدد منتهٍ من النقاط أن يشكِّل قطعة مستقيمة ذات طول محدد. لذا من الواضح أن أي قطعة مستقيمة، أو أي جزء من مستوٍ أو جزء من الفضاء، سيتشكَّل من عدد لانهائي من النقاط. وعلى المنوال نفسه، سيتشكَّل أي فاصل زمني من عدد لانهائي من اللحظات؛ وسيتشكَّل أي جزء مستمر من نسيج الزمكان من عدد لانهائي من الأحداث (*الحدث* هو المصطلح التقني لنقطة من الزمكان، أي يشير إلى مكان معيّن في لحظة معيَّنة).

لا ريب أن تتشكَّل أي منطقة مستمرة من فضاء رياضي من عدد لانهائي من النقاط الرياضية، إلَّا أننا الآن نناقش الفضاء الفيزيائي. علينا ألَّا نتسرع في افتراض أن كل خاصيَّة في الفضاء الرياضي المجرد الذي نعتمده لتنظيم تجاربنا هي خاصيَّة فعلية في الفضاء الفيزيائي المادي الذي نعيش فيه. ولكن ما هو «الفضاء الذي نعيش فيه»؟ إذا لم يكن فضاء الفيزياء الرياضية، فهل هو فضاء الأجسام المادية؟ أم هو فضاء تصوراتنا؟

من حيث الأجسام المادية أو التصورات، لا وجود حقيقي للنقاط في أي ظاهرة مادية أو إدراكية تشغل حيزاً معيناً ومنتهياً من الزمكان. لذا عندما نبحث عن اللامتناهي في الصِّغَر في المادة، فإننا لا نسأل عما إذا كانت المادة تتكون من عدد لانهائي من النقاط (غير القابلة للملاحظة)، بل عما إذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى اللانهاية.

إن الالتزام بتجنب كل ما هو عديم الشكل جعل من الطبيعي بالنسبة للفلاسفة الذريين اليونانيين (الذين اعتقدوا أن الكون مؤلف من ذرات)، مثل

ديموقريطس، تبنِّي نظرية للمادة تبدو بموجبها الأجسام غير المنتظمة في العالم على أنها مجموعات من الذرات غير القابلة للتجزئة والمتكاملة تماماً. (وفقاً لأفلاطون، هناك أربعة أنواع من الذرات، على شكل المجسَّم المتعدد الوجوه المنتظم. وهناك المجسَّم ذو الاثني عشر وجهاً، الذي اعتُقد بأنه يمثل الكون بعلامات البروج الاثني عشر). بالنسبة للذريين، كان العالم عبارة عن مجموعة مهولة من القطع التركيبية، مع أربعة أنواع رئيسة منها. واعتُبر تنوع المواد في العالم، من نفط وخشب وحجر ومعدن ولحم ونبيذ، خلائط من الأنواع الرئيسية الأربعة: الأرض والهواء والنار والماء؛ فاعتبر أفلاطون الذهب نوعاً كثيفاً جداً من الماء، والنحاس خليطاً من الذهب القليل مع الأرض.



الشكل 17

تبنَّى الخيميائيون والكيميائيون الأوائل نظاماً مشابهاً لما سبق، مع زيادة المواد الأولية لتشمل جميع المواد المتجانسة، مثل خامات المعادن والأملاح والجواهر. وكانت الوحدة الأساسية هنا هي الجزيء.

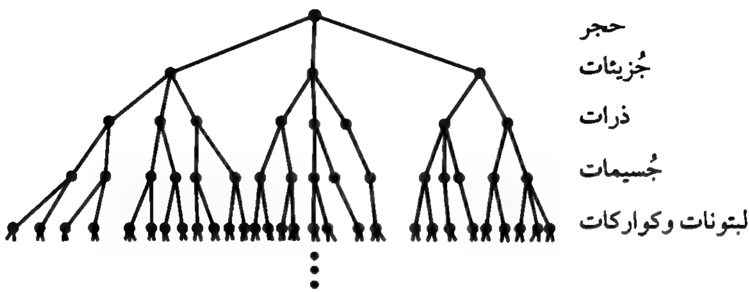
مع اكتشاف أن الماء يتحلل إلى هيدروجين وأوكسجين عند تمرير تيار كهربائي عبره، بدأت مرحلة جديدة في الإدراك الإنساني. وفي نهاية المطاف، تمّ جمع التنوع الكبير للجزيئات الموجودة تحت فكرة أن الجزئيات مجموعات من الذرات. وسرعان ما عُرِف تسعون نوعاً مختلفاً من الذرات أو العناصر الكيميائية. وظهر إيضاح جديد عندما عُرِّضت رقاقة معدنية لأشعة ألفا، بأن الذرة تتكوّن من نواة موجبة مُحاطة بإلكترونات سالبة. وبعد ذلك بوقت قصير اكتُشف النيوترون، وعُرِّفت الخصائص الفيزيائية للذرات المختلفة باعتبارها مجموعات من البروتونات والنيوترونات والإلكترونات.

خلال نصف القرن الماضي، علمنا باستخدام مسرِّع الجُسيمات أن هناك بالفعل العديد من «الجُسيمات الأولية» إضافة للنيوترون والإلكترون والبروتون. الوضع في الفيزياء عالية الطاقة اليوم هو على النحو التالي: بعض الجُسيمات -الإلكترون والنيوترون والميون- غير قابلة للتجزئة على الإطلاق، وتُسمَّى هذه الجُسيمات بـ«اللبتونات». ويمكن تقسيم جميع الجُسيمات الأخرى -البروتون والنيوترون والميزون واللامبدا باريون وغيرها- إلى وحدات أصغر، والتي تجتمع لتكوِّن المزيد من الجُسيمات.

يعتمد النمط التاريخي في تفسير المادة على أنها مجموعات من مواد قليلة أبسط منها، وأن تنوع الأشكال يحلّ مكان تنوع الجوهر. لذا ليس من المفاجئ أن نجد اقتراحاً بتفسير التنوع الكبير للجُسيمات الموجودة القابلة للقسمة بأنها تتكون من جُسيمات أولية (كوارك).

ويعتمد المبدأ الثاني في النمط التاريخي على أنه مع استخدام أدوات أقوى في الأبحاث، يصبح من الواضح أن هناك أنواعاً أخرى وأكثر من الجُسيمات التي اكتُشفت أولاً. وهذا هو المجال الذي تبحث فيه فيزياء الطاقة العالية مؤخراً. أولاً اكتُشف ثلاثة أنواع من الكوارك: علوي وسفلي وغريب. الآن، عُرِف الكوارك الساحر، وهناك نوعان جديدان أيضاً: كوارك القمة وكوارك القاع. ويبدو من الممكن وجود أنواع متعددة من الكواركات التي سيتضح أخيراً أن كلاًّ منها يتكون من عدد من، لنَقُل «ظُليمات»... وأن لهذه الظُّليمات أنواعاً مختلفة عدة. ستتكرر الدورة مرة أخرى، مع المزيد

والمزيد من أنواع الظُّليمات التي سيتضح أنها تتكون من جُسيمات أصغر منها، ليظهر أن هناك أنواعاً أخرى لهذه الجُسيمات، وهكذا...



الشكل 18

في حال استمرت هذه العملية إلى ما لانهاية، سنكون أمام حقيقة أن الحجر هو مجموعة من الأجزاء، التي يتكوّن كل منها من مجموعة من الأجزاء، التي يتكون كل منها... إلى أن يتكوّن الحجر من عدد لانهائي من الجُسيمات التي لا يمكن تقسيمها إلى ما هو أصغر منها. سنصل إذاً إلى مستو لا مادة فيه، إنما شكل فحسب. بالنسبة للحجر، فإن نسبة الفراغ في حجمه أكبر من حجم المادة، نظراً لأنه يتكوّن من مجموعة من الجزيئات، وكل جزيء عبارة عن سحابة من الذرات، والذرة عبارة عن بضعة إلكترونات تدور في مدارات كبيرة حول نواة صغيرة جداً... فمادة الحجر الصلبة تظهر، عند الفحص الدقيق، عبارة عن سحابة من أجزاء أصغر من المادة، والتي بدورها سحابات أخرى، وهكذا. يمكننا أن نلاحظ في المخطط الذي رسمتُه للحجر أنه يحتوي على عدد محدود من العقد والتفرعات في كل مستوى، لكن نظراً لوجود عدد لانهائي من المستويات، فعدد العقد والتفرعات لانهائي أيضاً.

هناك اعتراضات مختلفة على هذا النوع من اللانهاية الفيزيائية. تقول حجة أرسطو، على سبيل المثال، إنه ما لم يتمكن المرء من تقسيم الحجر إلى مستوى الكوارك، فوجود الكوارك هو احتمال فحسب (ليس مؤكداً).

وأمَّا أن يكون الحجر قابلاً للقسمة إلى ما لانهاية، فيُقابَل بأنه لن يتمكن أي امرء من تنفيذ هذه الانقسامات اللانهائية، لذا لا يوجد بالفعل عدد لانهائي من الجُسيمات في الحجر في الوقت الحالي.

هناك اعتراض أكثر عملية، وهو أنه لم يتم فعلياً رصد أي كوارك مفرد على الإطلاق، فوجود الكوارك استُنتج على نحو غير مباشر كطريقة لشرح تناظر البُنية التي توجد في جداول الجُسيمات الأولية. لكن هذا الاعتراض ليس قوياً بما يكفي، فنحن نؤمن بوجود العديد من الأشياء التي لا يمكن ملاحظتها ورصدها إلا على نحو غير مباشر؛ وكرد عملي أكثر، إذا تابعنا تطوير أدوات القياس لدينا، فلا يوجد سبب للاعتقاد بأننا لن نتمكن من رصد الكوارك منفرداً في المستقبل.

الاعتراض الأكثر قوة على فكرة «الجُسيمات، الجُسيمات الأصغر،...» هو أن الواقع الذي يستند عليه العالَم أشبه بالمجال بدلاً من الجُسيمات. من خلال تقسيم الجُسيمات إلى ما لانهاية نصل إلى استنتاج أنه لا يوجد سوى شكل أو مظهر، ولا يوجد محتوى أو معنى. يفضِّل العديد من الفيزيائيين البدء من هذه النقطة. بالنسبة لهؤلاء العلماء، تفسِّر هندسة الزمكان الميزات المختلفة للعالَم. ويجب على من يريد فهم وجهة النظر هذه أن ينظر بتمعُّن إلى سطح نهر أو جدول صغير. سيرى تموجات دائرية، وانتفاخات تتدفق، ودوامات ودرادر، وفقاعات تتشكل، وقطرات تتطاير وتعود إلى الماء، وأمواج تتحول إلى رغوة. من وجهة نظر *الديناميكا الهندسية*، يُعتبر نسيج الزمكان كسطح جدول صغير، وكل الحقول والجُسيمات المختلفة التي تظهر إلى الوجود ناتجة عن التدفق.

هل يسمح زمكان الديناميكا الهندسية بوجود لانهاية في الصِّغَر؟ ما من إجابة فعلاً لهذا السؤال في الوقت الحاضر. تقول إحدى وجهات النظر بوجود نوع من «حبَّات» الزمكان، وتمثِّل الحبَّة حجماً مشابهاً للذرة لا يمكن تجزئته. وتقول وجهة نظر أخرى إن الزمكان لا بدّ أن يكون مستمراً إلى ما لانهاية مثل الفضاء الرياضي.

لكن ماذا لو لم يكن هناك شيء أصغر من الإلكترونات والكواركات؟

هل سيبقى عندها أي أمل بوجود لانهاية في الصِّغَر؟ يمكن للمرء أن يجادل بأنه يمكن لإلكترون معيّن أن يتواجد في عدد لانهائي من المواقع على طول متر واحد، وبذلك يكون فضاؤنا يحتوي بالفعل على عدد لانهائي من النقاط. يُفترَض أحياناً أن مبدأ عدم اليقين لميكانيك الكم يبطل هذه الحجة، لكن ليس هذا هو الحال.

الشكل 19

لا يضع ميكانيك الكم أي حدّ أعلى للدقة التي يمكن من خلالها، من حيث المبدأ، تحديد موقع الإلكترون؛ فالمبدأ يقتصر على أنه كلما ازدادت دقة تحديد موقع الإلكترون، تنخفض دقة تحديد سرعته واتجاه حركته. الدقة اللانهائية هي فكرة غير فيزيائية في الأساس، لكن يمكن -من حيث المبدأ- الحصول على أي درجة محددة من الدقة. إذاً، الدقة التي يمكن من خلالها قياس شيء ما هي مثال جيد على اللانهاية المحتملة، لكن لا يمكنها أن تكون لانهاية فعلية.

لكن مازال باستطاعتنا الحصول على لانهاية فعلية في العالم. إذا كان الإلكترون يقع في مكان ما بين الصفر والواحد، فإن كل عدد في المجموعة اللانهائية التالية هي نتيجة محتملة لقياس محتمل:

$.2 \pm .1, .23 \pm .01, .235 \pm .001, .2356 \pm .0001, \ldots, .235608947 \pm .000000001, \ldots$

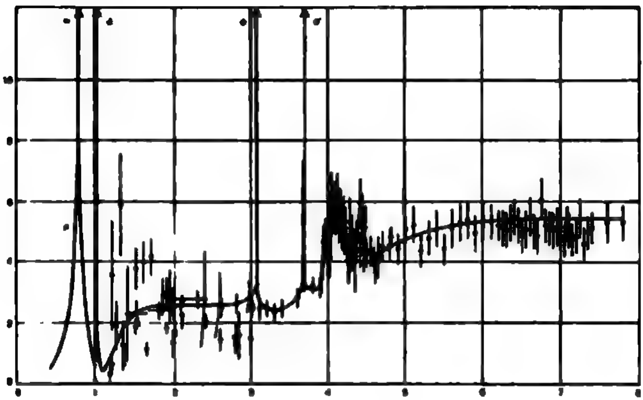
على الرغم من أن الدقة اللانهائية مستحيلة، يمكن لإلكترون أن يشغل أياً من النقاط اللانهائية التي تقع بين الصفر والواحد والتي يفصلها عن الصفر مسافة عشرية نهائية.

مع كل ما سبق، هناك بعض التخمينات الفيزيائية الحديثة التي تعتبر أن «المكان» و«الزمان» تعبيران تجريديان ينطبقان على مستوانا الحجمي، ولكنهما يفقدان أي معنى تماماً بعد التقسيم العشري الثلاثين. ما الذي يوجد هناك إذاً؟ ربما صديقتنا القديمة «اللانهاية». ولكن حتى إذا لم نتمكن من الحديث عن عدد لانهائي من المواقع، فما زال لدينا أمل بأنواع لانهائية من الجُسيمات.

لننتقل إلى ميكانيك الكم. في بعض الأحيان، يُفهم أن ميكانيكا الكم تثبت أن هناك حجماً أصغرياً يمكن أن يوجد. لكن هذا ليس صحيحاً. يؤكد ميكانيك الكم على أنه لـ«رؤية» الجُسيمات الصغيرة للغاية، يجب اعتماد عمليات نشيطة للغاية للبحث عنها.

من المفيد هنا معرفة كيفية قيام علماء فيزياء الطاقة العالية بالبحث عن جُسيمات جديدة. تشبه العملية إلى حدٍّ ما البحث عن محطات الراديو عن طريق تحريك قرص المذياع ذهاباً وإياباً حتى تعثر على موسيقى بين التشويش. تعتمد التجارب الفيزيائية من هذا النوع على مسرِّع الجُسيمات الذي تحدث فيه تصادمات بين الإلكترونات والبوزيترونات باستمرار. تتنوع طاقة عمليات التصادم وتظهر من خلال تحويل الجهد على المسرِّع، كما في المخطط الموجود في الشكل 20، صعوداً وهبوطاً. هناك عدد R يقيس «جُسيمية» التفاعل الذي يحدث. يمكن أن نعتبر R أنه رقم محطة على مؤشر المذياع، رغم أن صوت الموسيقى ليس أعلى مثلاً من صوت التشويش، إلَّا أنه يختلف نوعاً. عندما نصل إلى رسم بياني للعدد R يقابل ذروة أو نتوء لطاقة مفاجئة، فمن المفترض أن هذه الطاقة هي سمة لكتلة جُسيم جديد. تُسمَّى هذه العملية بـ«صيد النتوءات». ومن المثير للاهتمام ملاحظة أنه

كلما كانت الذروة أكثر حدة وضيقاً، كلما كان الجسم أطول عمراً، وبالتالي أكثر «واقعية». وتأتي «واقعية» الجُسيمات من أن الزمن الذي تُرصد خلاله يكون قصيراً للغاية، مما يضع العلماء أمام حيرة إن كان ما يرصدونه افتراضاً أم واقعاً. لذا كلما كان عمر الجُسيم أطول، كلما تمكّن العلماء من تأكيد وجوده في الواقع.



الشكل 20

هكذا نصل إلى أن مسألة ما إذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى اللانهاية أمر لا يمكن البتّ فيه؛ فكلما توصَّل العلماء إلى جُسيم ضئيل، سيدَّعي البعض أن من الممكن تحليله إلى جُسيمات أصغر إذا توفرت طاقة عالية بما فيه الكفاية؛ وبالمقابل، كلما افتُرض بإمكانية قسمة مادة إلى اللانهاية، سنصل إلى جُسيمات لا يمكن تقسيمها. يميل المرء إلى الشك فيما إذا كانت لهذه المسألة أي معنى حقيقي على الإطلاق، لا سيما في ضوء حقيقة أن مفاهيم مثل «المادة» و«الفضاء» ليس لها معنى حقيقي في العالم الصُّغرَوي لميكانيكا الكم.

بالعودة إلى شيء أكثر مادية، لنفكر في إمكانية تقسيم مجالنا الإدراكي. هناك حدٌّ للتقسيم الذي يمكن أن نصل إليه في هذا المجال. إذا نُقِرت نقرتان بفاصل زمني صغير بما يكفي، فلا يستطيع المرء تمييزهما سماعياً عن

بعضهما البعض. وإذا وُجدت نقطة من الحبر صغيرة بما يكفي على ورقة بيضاء، فلن يتمكن المرء من رؤيتها. يتحدث ديفيد هيوم عن هذه الحقيقة في كتابه «رسالة في الطبيعة الإنسانية» في عام 1739:

«ضع بقعة من الحبر على ورقة، وركِّز نظرك عليها، وابتعد عن الورقة شيئاً فشيئاً إلى أن تفقد رؤيتها؛ من الواضح أن اللحظة التي تسبق اختفاء الرؤية هي اللحظة التي تكون فيها الصورة أو الانطباع غير قابل للتقسيم أكثر من ذلك»[30].

أفضل طريقة لفهم نظرة هيوم للعالم هي تبسيط الموضوع بأن نهمل بُعد الزمن وأبعاد المكان، ونعتبر أن هناك بُعداً واحداً هو *المقياس*. في الشكل 21، رسمتُ استمرارية بُعد المكان الواحد والمقياس، والمجال الإدراكي لمن يسكن في عالَم أحادي البُعد. إن هذا المجال الإدراكي ذو حجم ثابت ومعين؛ ويتكوّن من عدد محدد من الفتحات يمثّل كل منها الحد الأدنى للإدراك. في هذا النموذج، يمتلك الشخص الأحادي البُعد مجالاً إدراكياً ذا بُعدين، فيمكنه الانتقال يميناً أو يساراً على محور المكان، ويمكنه تكبير مجاله الإدراكي وتقليصه بتحركه صعوداً وهبوطاً على محور المقياس.

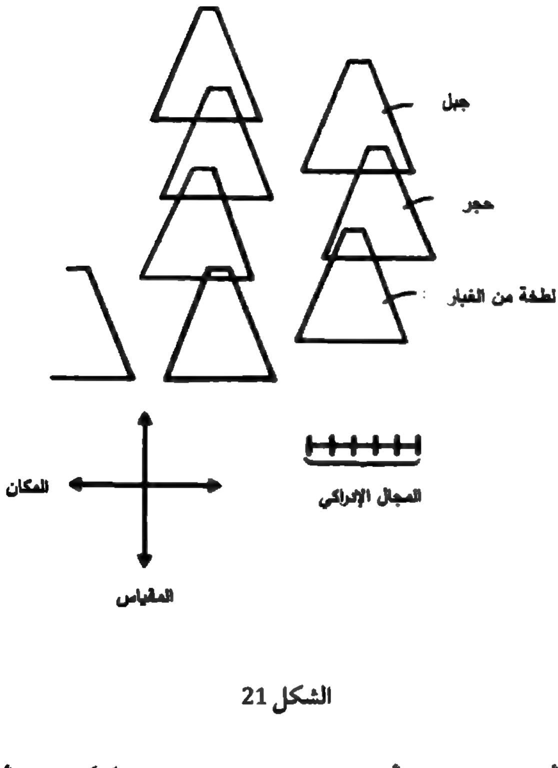
إذا كانت الكائنات المُسمَّاة (جبل، حجر، لطخة من الغبار) متموضعة في المكان المناسب من استمرارية المكان–المقياس، فعندها يتموضع المجال الإدراكي في مكان ما في منتصف الصورة. عند مستوى ما تكون الأحجار مرئية، لكن يجب توسيع مجال الرؤية أكثر لرؤية الجبل ككائن واحد، وتركيزه ليمكن رؤية لطخة الغبار على صخرة. ونلاحظ أن تغيير قياس المجال الإدراكي للشخص يعادل تحريك هذا المجال في استمرارية المكان–المقياس.

يأخذ هيوم التصورات على أنها أمر رئيس، وعلى الرغم من أنه يُعتبر تجريبياً، إلا أنه صاحب وجهة نظر مثالية للغاية. التصورات موجودة «هناك»؛ ويبدو أن وعي المرء يتحرك فيما بينها مثل فراشة تطير من زهرة إلى زهرة.

يحتوي المجال الإدراكي للمرء الحد الأدنى من العناصر، ومع ذلك

30- David Hume, *A Treatise of Human Nature* (L. A. Selby-Bigge, ed., Oxford: Clarendon Press, 1896), p. 27.

يمكن تحليل هذه العناصر الدنيا إلى عناصر أصغر عن طريق تغيير مجال المرء (من خلال تركيز النظر أو الاقتراب من الكائن المعني أو استخدام تلسكوب). والسبيل الوحيد للتوفيق بين هذه الجانبين المتناقضين ظاهرياً في عالمنا الإدراكي هو النظر إلى العالم على أنه استمرارية خماسية الأبعاد من الزمان-المكان-المقياس.

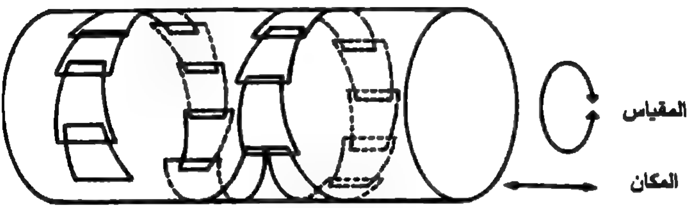


الشكل 21

يمكن أن نعبّر عن مسألة وجود اللامتناهي في الصِّغَر على أنها مسألة إن كانت استمرارية المكان-المقياس المرسومة في الشكل 21 تمتد نزولاً إلى اللانهاية. وبالمثل، مسألة وجود اللانهاية في الكِبَر هي مسألة إذا كانت الاستمرارية تمتد صعوداً إلى اللانهاية.

لطالما كنتُ مهتماً بحيلةٍ غريبة تتجاهل اللانهاية في الكِبَر واللانهاية في الصِّغَر دون تقديم أي حدٍّ مطلق مُدرَكٍ، أدنى أو أقصى. تقوم الحيلة ببساطة

بحَني مخطط المكان–المقياس بشكل أنبوب (حيث يتحول محور المقياس إلى دائرة). في هذه الحالة، يمكن للكون أن يتكوّن من العديد من المجرات، التي تتكوّن من العديد من الأنظمة النجمية، التي تتكوّن من العديد من الكواكب، التي تتكوّن من العديد من الصخور، التي تتكوّن من العديد من الجزيئات، التي تتكوّن من العديد من الذرات، التي تتكوّن من العديد من الجُسيمات الأولية، التي تتكوّن من العديد من الكواركات واللبتونات، التي تتكون من العديد من الظُّليمات، والتي يمكن لأي ظُليم منها أن يحوي العديد من الأكوان[31].



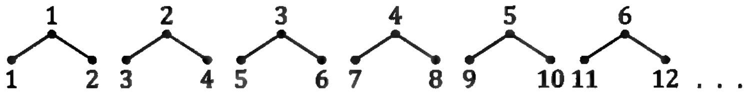
الشكل 22

المشكلة في نموذج المقياس الدائري هذا أنه إذا قُسِّم كوننا بما فيه الكفاية، فسنحصل على العديد من الأكوان، وينقسم كل منها إلى العديد من الأكوان. لكن هل هذه الأكوان متشابهة؟ ربما، لكن حينها سيكون من الصعب رؤية كيف يمكن لأكثر من كائن واحد الوجود في العالم. والصعوبة الأخرى في هذه الحالة، هي كيف يمكن لكل واحد من الأكوان المكوِّنة أن يكون أحد الأكوان البادئة؟

لن تكون هناك أي مشكلة إذا كان لدينا عدد لانهائي من الأكوان. ولتوضيح ذلك قمتُ برسم صورة لأبسط حالة: الحالة التي يتكون فيها كل كون من كونين. يمكننا أن نرى أن 1 ينقسم إلى 1 و2، و2 ينقسم إلى 3

31– نشرت في صيف عام 1975 رواية خيال علمي تدور حول فكرة المقياس الدائري. ونُشرت الرواية على أجزاء في مجلة Unearth عامي 1977 و1978. الرواية هي:
Rudy Rucker, *Spacetime Donuts* (New York: Ace Books, 1981).

و4، وعموماً ينقسم n إلى $2n-1$ و$2n$. يمكننا الاستمرار في تقسيم أي كون معين إلى اللانهاية، وبالتالي الحصول على عدد لانهائي من المكونات في أي جزء من المادة.



ما أحرزناه إلى الآن هو التحرر من الاعتقاد بأن مقياس حجم معين أمر أكثر جوهرية أو أهمية أو تعقيداً من مقياس حجم آخر. فلماذا تضيّع الوقت بالاستماع إلى أخبار الساعة السادسة حينما لا تكون أنت ذاتك أكثر أهمية من ذرة أو أقل أهمية من مجرّة؟ يحررنا هذا السؤال من الكثير من الضغط الذي يتعرض له المرء، فكثيراً ما يشعر أحدنا أن اهتمامات المجتمع أو العالم أكثر أهمية من اهتمامات الفرد الشخصية المباشرة. لكن هذا الافتراض يعتمد على أن بعض الأحجام أكبر بالمطلق من أحجام أخرى، وبالتالي أكثر أهمية، وهذا ما تقوِّضه فكرة المقياس الدائري.

خلاصة

نلاحظ في الخلاصة أن من الممكن تماماً أن يكون كوننا محدوداً بكل معنى الكلمة. يستبعد الزمكان الحلقي من النوع المذكور في قسم اللانهايات الزمنية جميع اللانهايات في الكِبَر؛ ويستبعد المقياس الدائري المعروض في قسم اللانهايات في الصِّغَر أي لانهاية في الصِّغَر متفرِّدة وواضحة. لكن يمكن التعامل مع هذه النهايات بسلاسة كما يلي: ما من حاجة ليكون هناك نهاية للزمن أو حافة للفضاء أو جُسيم أصغري.

من الصعب تصديق أنه لن يوجد سوى كون واحد من هذه الأكوان المنتهية تماماً. أولاً، يصعب رؤية كيفية تطبيق المقياس الدائري على نحو صحيح ما لم يكن هناك عدد لانهائي من الأكوان؛ ثانياً، وجود كون منته واحد ينتهك مبدأ السبب الكافي (أي إن لكل شيء سبباً يتوقف عليه)؛ ثالثاً، هناك شعور بأن «الفضاء» الذي يتقوَّس في الزمكان يجب أن يكون حقيقياً.

في قسم اللانهاية المكانية، أُشير إلى أنه إذا حدَّ المرء الكون مراراً وتكراراً من خلال استبدال الخطوط بدوائر، وإذا لم يقبل أبداً كوناً ذا عدد أبعاد n على أنه نهاية الفضاء، فسيُضطر إلى الاستنتاج أن الفضاء ذو أبعاد لانهائية وأن هناك عدداً لانهائياً من الكائنات في هذا الفضاء الكوني.

اللانهايات في مشهد العقل

ناقشنا في القسم الأخير بعض الطرق التي يمكن أن تظهر فيها اللانهاية الفيزيائية الفعلية. لكن هناك أشياء غير مادية. هناك العقول والتفكير والأفكار والأشكال. سنرى في هذا القسم ما إذا كان لأي من هذه الكيانات غير المادية لانهايات فعلية.

لفهم صحيح لما سنناقشه في هذا القسم، من الضروري الحفاظ على عقل منفتح أمام مسألة إن كان العقل يساوي الدماغ أم لا، لأنه إذا افترض المرء بديهياً أن الفكرة ليست أكثر من تكوين كيميائي حيوي معين في منطقة محددة ومعيّنة من مادة (مادة الدماغ)، فسيجد تلقائياً أن الأفكار اللانهائية مستحيلة الوجود (إلا إذا كان يعتقد بالانقسام اللانهائي للمادة).

لطرح بعض الشكوك الأولية حول الفرضية القائلة بأن الدماغ يساوي العقل، لنذكر بعض الأسئلة سريعاً. هل ما زال ما فكرت به في الأمس جزءاً من عقلك؟

إذا امتلكتَ موسوعة ما واستخدمتها، فهل الحقائق الموجودة فيها جزء من عقلك؟

هل الحلم الذي لا تتذكره موجود بالفعل؟

كيف يمكنك فهم كتاب بأكمله بالرغم من أنك قرأته ككلمات منفصلة؟

هل ستظل حقائق الرياضيات موجودة إذا اختفى الكون؟

هل كانت نظرية فيثاغورث موجودة قبل أن يولد فيثاغورث؟

إذا رأى ثلاثة أشخاص الحيوان نفسه، نقول عن الحيوان إنه حقيقي؛ ماذا لو رأى ثلاثة أشخاص الفكرة ذاتها؟

بالنسبة لي، أفكر في الوعي على أنه نقطة، «عين» تتحرك في نوع من الفضاء العقلي. كل الأفكار موجودة في هذا الفضاء متعدد الأبعاد، والذي يمكننا أن نسمِّيه أيضاً **مشهد العقل**. تتحرك أجسامنا في الفضاء المادي الذي يدعى الكون، ويتحرك وعينا في الفضاء العقلي المُسمَّى **مشهد العقل**.

كما نتشارك جميعاً الكون ذاته، فإننا نتشارك جميعاً مشهد العقل نفسه. فكما يمكنك أن تشغل موقعاً في الكون يشغله أي شخص آخر، يمكنك -من حيث المبدأ- أن تشغل حالة عقلية أو موقعاً في المشهد العقلي يمكن لشخص آخر أن يشغله. من الصعب بالطبع أن تُظهر لشخص ما كيف يرى الأشياء وفق طريقتك بالضبط، لكن كل التراث الثقافي للإنسانية يشهد على أن هذا ليس مستحيلاً.

مثلما توجد صخرة ما في الكون، سواء تعامل أحد معها أم لا، كذلك توجد الأفكار في مشهد العقل، سواء فكَّر بها أحد أم لا. والشخص الذي يقوم بأبحاث رياضية أو يكتب القصص أو يتأمل، هو مستكشف لمشهد العقل بالطريقة ذاتها التي استكشف فيها نيل أرمسترونغ[32] أو ديفيد لفينغستون[33] أو جاك إيف كوستو[34] الخصائص المادية لكوننا. كانت الصخور موجودة على القمر قبل أن تصل إليه المركبة الفضائية. وجميع الأفكار الممكنة موجودة بالفعل في مشهد العقل.

قد يظهر عقل الفرد موازياً للغرفة أو الحي الذي يعيش فيه. ولا يمكن للمرء أن يتصل بالكون بأكمله من خلال تصوراته المادية فحسب، ومن المشكوك فيه ما إذا كان عقل المرء قادراً على ملء مشهد العقل بأكمله.

32- نيل أرمسترونغ (1930-2012)، رائد فضاء أمريكي، وأول إنسان يمشي على القمر. حصل على الماجستير في هندسة الفضاء وعلى العديد من الشهادات الفخرية والأوسمة والتكريمات. (المُترجِمة).

33- ديفيد ليفينغستون (1813-1873)، مستكشف إسكتلندي لوسط إفريقيا، وكان أول أوروبي يشاهد شلالات فيكتوريا. عمل مبشِّراً وكتب حول أسفاره. (المُترجِمة).

34- جاك إيف كوستو (1910-1997)، ضابط بحري ومستكشف وصانع أفلام وثائقية ومؤلف وباحث فرنسي. كرَّس حياته لدراسة البحار والمحيطات وما تحويه من أشكال الحياة. وكان عضواً في أكاديمية اللغة الفرنسية. (المُترجِمة).

في تشبيه أخير، نلاحظ أن هناك دائماً منطقة معينة من جسد المرء التي لا يعرفها عادة أحد آخر باستثنائه -إلا بالجراحة؛ فلا أحد غيري مثلاً يمكنه تقييم حالة معدتي. وبالطريقة ذاتها، هناك جزء من مشهد العقل الذي يمكنني وحدي فحسب أن أعرفه، فإن لم أملك حظاً من الإلهام والخيال والإحساس الفني اللازم للتعبير، فإن المشاعر التي تعبر عقلي عندما أفكر في طفولتي ستبقى خاصة بي ولا يمكن التعبير عنها. غير أن هذه المشاعر التي لا توصف نوعاً ما، تشكّل جزءاً من مشهد العقل المشترك، ويصعب على أي أحد آخر أن يصل إليها.

الهدف مما سبق توضيح أنه كما لا تعني حدود أجسامنا المادية أن كل جسم فيزيائي محدود، فإن العدد المحدود لخلايا دماغنا لا يعني أن كل كائن عقلي محدود.

حسناً... هل هناك من أية عقول أو أفكار أو مفاهيم أو أشكال لانهائية في مشهد العقل؟

لنناقش مجموعة الأعداد الطبيعية *N*. إن المُرشَّح الأشهر لمفهوم اللانهاية هي مجموعة الأعداد الطبيعية *N*. تظهر محاولتنا لعرض هذه المجموعة كما يلي: $N=\{1, 2, 3, ...\}$. وتعني (...) أن شيئاً ما واضح لكنه مُتعذِّر على الوصف، وما يُقصد بالطبع هو أن كل الأعداد الطبيعية محتواة في هذه المجموعة. يبدو كل عدد موجوداً مستقلاً في مشهد العقل، ونفترض أن المجموعة التي تحوي الأعداد الطبيعية موجودة في مشهد العقل أيضاً، حتى إن المرء يشعر كأن بإمكانه *رؤيتها*.

يمكننا تجنب استخدام (...) واستبدالها بالقول: «*N* هي المجموعة التي تمتلك الخاصية التالية:

1 في *N*، ومن أجل أي عدد x في *N*، فإن $x+1$ في *N* أيضاً».

تكمن المشكلة في هذا التعريف أنه لا ينتقي مجموعة معينة على نحو فريد. فمثلاً، إذا وُجد عدد لانهائي في الكِبَر i، وكانت المجموعة N^* تحتوي كل أعداد المجموعة *N* وجميع الأعداد ذات الشكل $i+n$، حيث n أي عدد من *N*، عندها ستحقق المجموعة N^* الخاصية المذكورة سابقاً لكنها ستختلف عن المجموعة *N*.

الشكل 23

قد نحاول الالتفاف حول هذه الصعوبة بالقول «*إن N هي أصغر مجموعة في مشهد العقل تحتوي على العدد* 1 *وعلى x+1 حيث x ينتمي إلى N*». لكن لا يمكن استخدام كلمة «مشهد العقل» على نحو ذي معنى في تعريف ما، وسأشرح أسباب ذلك في القسم التالي. إن مفهوم «مشهد العقل» أوسع من أن يُختزَل بأي كلمة أو رمز.

إذا حاولنا تجنُّب هذه الصعوبة عن طريق استبدال نوع من الوصف النهائي للكون العقلي بكلمة «مشهد العقل»، فإننا سنواجه المشكلة السابقة نفسها. نعرف من خلال العمل الكلاسيكي لعالِم المنطق ثورالف سكوليم أنه بالنسبة لأي وصف نهائي للمجموعة ***N***، سيكون هناك مجموعة أخرى ****N**** توافق الوصف نفسه أيضاً. لذا فمن الصحيح تماماً أن ما تعنيه (...) متعذِّر عن الوصف.

اعتبر بعض المفكرين أن ذلك يعني عدم وجود مجموعة ***N*** فريدة في مشهد العقل. يمكن لهذا أن يكون صحيحاً، لكنه لا يعني اعتبار أنه لا توجد مجموعات لانهائية في مجموعة العقل: إن كان هناك العديد من النسخ من مجموعة الأعداد الطبيعية، فإذاً هناك العديد من المجموعات اللانهائية. مع ذلك، عادة ما يكون الميل نحو الافتراض بأن هناك مجموعة ***N*** بسيطة وفريدة، تماماً كما يكون من الأسهل الافتراض بأن هناك كوناً واحداً فقط بدلاً من عدد كبير من «الأكوان الموازية».

أشير هنا إلى أنه بافتراض الزمن لانهائياً فعلاً، وكما يمكننا الإشارة إلى كوكب الأرض بالقول «هذا الكوكب»، فيمكننا الإشارة إلى المجموعة ***N*** بالقول «عدد الثواني في هذا الزمن». وهذا يماثل في الواقع ما يقوله الناس عند محاولتهم تعريف مجموعة الأعداد الطبيعية ***N*** بقولهم: «مجموعة الأعداد الطبيعية هي ما تحصل عليه إذا بدأت بالعدد 1 وتابعت إضافة 1 في كل مرة إلى الأبد».

إذا وُجدت أشكال لانهائية بالفعل في مشهد العقل، فربما استطعنا من خلال بعض الخدع الغريبة أن نرى بعضها. أكَّد الفيلسوف جوزيه رويس أن الصورة الذهنية لعقل الفرد يجب أن تكون لانهائية[35]. وتبريره لذلك هو أن صورة الفرد لعقله هي بحدٍّ ذاتها عنصر موجود في العقل. إذاً، الصورة تتضمن صورة بدورها تتضمن صورة، وهكذا. ويمكن تصور هذا النكوص اللامتناهِ على نحو جيد بتخيلنا صورة لخريطة الولايات المتحدة، تتضمن الصورة ذاتها بمقياس أصغر، وبدورها تتضمن الصورة بمقياس أصغر، وهكذا. ونشاهد هذه الفكرة في الإعلانات التجارية أحياناً، أو عند صنع علامة مميزة لمنتج تجاري ما.

الشكل 24

في عالَم المادة، ربما لن نتمكن أبداً من الانتهاء من صنع هذه العلامة، لكن هذا لا ينفي وجود مثل هذا النموذج. ولن نواجه أي مشكلة إذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى ما لانهاية. (إذا كان المقياس الدائري حقيقياً، فكل شيء -بمعنى ما- هو بالفعل كائن من هذا النوع!).

35- Josiah Royce, *The World and the Individual, First Series*, Appendix: The One, the Many and the Infinite (New York: Macmillan, 1912), pp. 504–507.

لا يوجد بالتأكيد أي سبب يمنع العقل اللامادي من أن يكون لانهائياً. والنقطة التي يذكرها رويس هي أنك إذا اعتقدت أن في عقلك صورة مثالية لعقلك نفسه وما يحتويه، فإن عقلك لانهائي. يمكن أن يحاول المرء تجنُّب مثل هذا الاستنتاج بتبنِّي موقف المقياس الدائري والإصرار على عدم وجود فرق بين العقل وصورة العقل عن نفسه، حيث تكون المجموعة اللانهائية المزعومة {صورة العقل، صورة الصورة، صورة صورة الصورة،...}، هي في الواقع المجموعة {العقل، العقل، العقل،...} نفسها، وهي مجرد مجموعة بعنصر واحد: {العقل}.

لنناقش هذا الأمر أكثر، واسمحوا لي أن أذكر شكلياً بعض أدوات نظرية المجموعة. وفق كانتور: «المجموعة هي عدة عناصر تقدِّم إمكانية التفكير بها كواحد»[36]. وتُكتب المجموعة عادة كزوجين من الأقواس { } يضمان بعضاً من وصف محتويات المجموعة. ومن الأسهل تخيل القوسين كبالون من الأفكار يعلو رأس من يفكِّر. إذاً، المجموعة {1, 2} هي الوحدة التي نحصل عليها بمعاملة التعددية المكوَّنة من 1 و2 على أنها وحدة واحدة. ويمكننا تخيل هذه المجموعة كبالون فكري يحتوي على 1 و2.

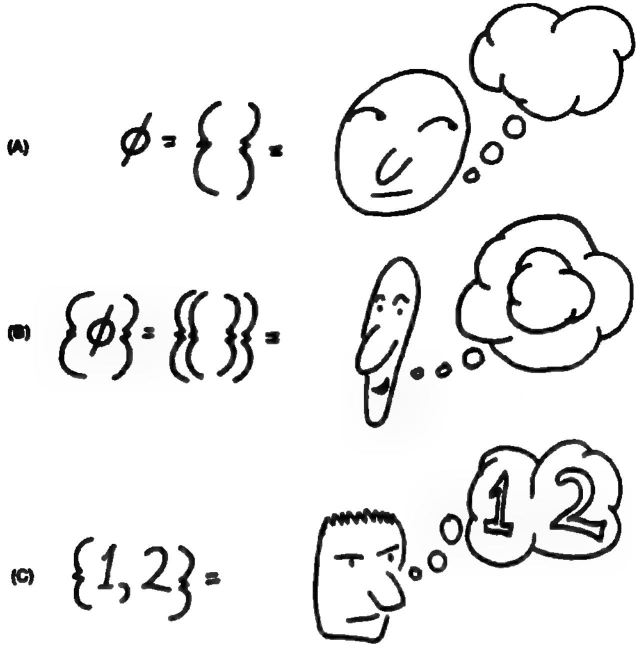
تتميز المجموعة الفارغة Ø بأهمية خاصة في نظرية المجموعة، وهي المجموعة التي نحصل عليها بجمع «لا شيء». ويمكن أن نكتب Ø بالطريقة العادية { }، ورسمتُها كبالون فكري فارغ.

يمكن بناء المزيد من المجموعات المعقدة باستخدام الأقواس فحسب بترتيبات مختلفة. مثلاً لدينا المجموعة {{ }} الموَّضحة في الشكل B 25، كما يمكننا أن نشكِّل المجموعة

{ {{{ }}, { }}, {{ }},{ }}

وهي الطريقة التي يتم تمثيل العدد 3 بها عادة بمجموعات نقية. (المجموعة النقية هي المجموعة المكوَّنة من مجموعات خالية).

36– Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 204.

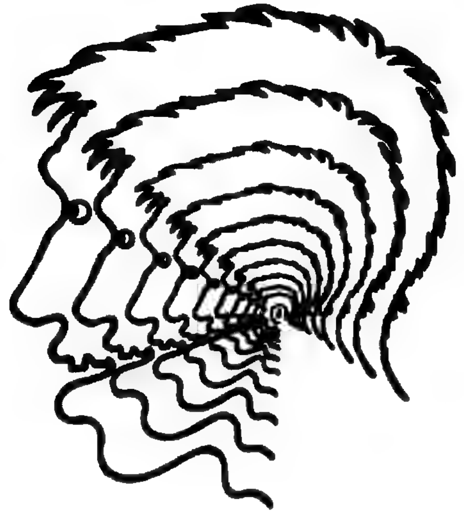


الشكل 25

الشكل 26

لنعد الآن إلى السؤال عمَّا إذا كان العقل الذي يحوي صورة كاملة لذاته هو لانهائي. ولتبسيط الأمور إلى أساسها، لنقُل أن لدينا مجموعة M تحوي عنصراً وحيداً هو M. أي $M = \{M\}$. إذا غيّرنا السؤال بأن نستبدل M على اليمين بـ $\{M\}$، يصبح لدينا $M = \{\{M\}\}$. ثم إذا تابعنا عملية الاستبدال إلى اللانهاية، سنحصل على $M = \{\{\{\ldots\ \ldots\}\}\}$. يمكن لهذا أن يكون تعريفاً

للمجموعة M التي لا تحوي إلا نفسها، لأننا لن نحصل على أي تغيير بإضافة أية أقواس. وبعبارة بسيطة، M مجموعة عنصرها الوحيد هو مجموعة عنصرها الوحيد مجموعة...



الشكل 27

لكن إذا كان العنصر الوحيد في المجموعة M هو فعلاً M ذاتها (وليس نسخة عنها)، فإن هذه المجموعة تحوي عنصراً واحداً فحسب. وعند محاولتنا وصف هذا العنصر باستخدام الأقواس، سنحصل على وصف لانهائي. تُدعى أفكار مثل M بـ«التمثيل الذاتي». ويعتمد ما إذا كانت المجموعة M تُعتبر لانهائية أم لا على الشخص الذي يتعامل معها، سواء كان يعاملها على نحو شخصي (خاص بعقل الشخص)، أو على نحو موضوعي (كميزة من ميزات مشهد العقل التي ستُوصف بدقة بلغة نظرية المجموعة).

نظرية المجموعة هي في الواقع عِلم مشهد العقل. *تمثّل المجموعة شكل فكرة محتملة*. كما تمكننا هذه النظرية من وضع حقائق مختلفة حول مشهد العقل ضمن إطار واحد، بالطريقة ذاتها التي تمكننا فيه النظرية الذرية للمادة

من وضع إطار يمكن فيه استيعاب الصفات الفيزيائية والكيميائية للمادة في وقت واحد.

قبل النظرية الذرية للمادة، كانت ظواهر مثل الذوبان والاحتراق والصدأ والتجمد تُعتبر مختلفة نوعياً. ولكن بمجرد تطوير النظرية الذرية بشكلها الجيد، أصبح من الممكن التفكير بهذه الظواهر وفق طريقة واحدة. لم يظهر تقديم واعٍ ومستوفٍ لمفهوم نظرية المجموعة حتى مطلع القرن العشرين. وسرعان ما أصبح من الواضح أنه يمكن تمثيل جميع الكائنات التي يناقشها علماء الرياضيات -التوابع والرسوم البيانية والتكاملات والمجموعات والفضاءات والعلاقات والمتتاليات- كمجموعات. ويمكن للمرء أن يصل إلى حدِّ القول إن الرياضيات هي دراسة ميزات معينة لـ «كون نظرية المجموعة».

يرتبط كون نظرية المجموعة قوياً بمشهد العقل- ربما يمكن لنا أن نفكر بأن هذه النظرية مخطط عمل لمشهد العقل. نحصل على مجموعة بأخذنا فكرة وتجريد كل المحتوى العاطفي منها، مع الحفاظ على البُنية العلائقية المجرَّدة. المجموعة هي شكل لفكرة محتمَلَة. إذاً فمسألة أن هناك كيانات لانهائية في مشهد العقل تعادل فعلاً مسألة أن هناك مجموعات لانهائية.

وفقاً لمنظِّري المجموعة، هناك بالتأكيد مجموعات لانهائية: مجموعة الأعـداد الطبيعية، المجموعة التي تحتوي جميع مجموعات الأعداد الطبيعية، مجموعة جميع المجموعات التي تحتوي...إلخ. يظهر كل عنصر من هذه المتتالية كلانهاية أكبر من العنصر الذي يسبقه. تضمّ النظرية الحديثة للمجموعة مجالاً كاملاً لدراسة ما يُسمّى الأعداد الأصلية الكبيرة، والتي تدرس مجموعة مذهلة من اللانهايات الكبيرة.

لكن العديد من علماء الرياضيات والفلاسفة لا يتفقون مع واضعي هذه النظرية، فلا تزال وجهة النظر التقليدية للنهايات حاضرة عند الكثيرين. وفقاً لـ «النهائيين»، ما من وجود لشيء لانهائي، لا في السماء ولا في الأرض.

يُدعى أولئك الذين يؤكدون على وجود لانهايات من جميع الأحجام في مشهد العقل بـ «الأفلاطونيين». إلا أنه ليس اسماً ملائماً بعض الشيء، لأن

أفلاطون لم يكن مؤمناً باللانهاية؛ لكنه كان مؤمناً بوجود الأفكار مستقلة عن المفكرين، ولهذا الجانب من معتقداته دُعي اللانهائيون باسمه.

لن ينتهِ الجدل بين النهائيين واللانهائيين. فمن ناحية، يبدو مستحيلاً الآن إرضاء النهائيين ممن يطالبون بإظهار مجموعة لانهائية؛ ومن ناحية أخرى، تبدو فكرة المجموعات اللانهائية متسقة منطقياً، لذا لا يمكن للنهائيين إثبات عدم وجودها.

بالنسبة لي، أميل إلى الأفلاطونية، لكن إن كنت أيها القارئ عنيداً، فكيف يمكنني إقناعك بأن اللانهاية موجودة فعلاً؟ فكل ما يمكنني فعله، بعد كل شيء، أن أكتب عدداً منتهياً من العلامات على مجموعة منتهية من الأوراق. وإذا كنتَ تعتقد حقاً باستحالة اللانهاية، فلن يقنعك أي شيء إلا أن أعرض لك في الوقت ذاته كل عنصر من مجموعة لانهائية... ومهما حاولت أن أثبت لك، ستشير منتصراً في كل مرة إلى نهاية الإثباتات على الورقة التي أُريك إياها.

قبل الكانتورية، اعتقد النهائيون أنهم أثبتوا استحالة المجموعات اللانهائية الفعلية. لكن هذه الإثباتات كانت تنطوي على مغالطات دوماً. فعادةً ما تتعامل هذه البراهين مع خاصية معينة P التي يمتلكها كل عدد طبيعي. قد تكون P خاصية الفردية أو الزوجية، أو خاصية امتلاك قاسم مباشر، أو خاصية أن يكون العدد أكبر من أي قاسم له. ويقول الدليل الزائف ما يلي: «لكل عدد الخاصية P، إذا كان x عدداً لانهائياً، فإن x لا يمتلك الخاصية P، لذا لا يمكن أن يوجد عدد لانهائي». إن المغالطة في هذا الدليل الدائري تكمن في التأكيد على فكرة «لكل عدد الخاصية P»، وبالتالي الافتراض الخطأ بأن أي عدد لا يملك هذه الخاصية ليس موجوداً على الإطلاق.

لا يمكن بالطبع للمرء أن يفترض امتلاك المجموعات اللانهائية لخصائص معينة قبل أن ينظر إليها على الإطلاق! على سبيل المثال، أظهرت مفارقة غاليليو أنه يمكن لمجموعة لانهائية أن توضع في تناظر واحد لواحد مع مجموعة فرعية منها. لو افترضنا مقدماً أنه لا يمكن وضع أي مجموعة

في توافق مع مجموعة فرعية منها، لكان لدينا دليل على عدم وجود مجموعة لانهائية. لكن افتراضاً كهذا لا مبرر له على الإطلاق. وفي الواقع إنه يحمل افتراضاً مسبقاً بأن كل مجموعة نهائية... ولذا لن نصل إلى نتيجة مثمرة هنا.

ولكن هل نحن متأكدون بأن النهائيين لن يتوصلوا أبداً إلى دليل صحيح يثبت استحالة المجموعات اللانهائية؟ يجيب الأفلاطونيون بنعم، لأنهم متأكدون من عدم وجود تناقض في نظرية المجموعات اللانهائية. فالنظرية هي وصف لسمات معينة في مشهد العقل والتي «يمكن لأي كان رؤيتها».

ما زال هناك أمل للنهائيين. فهناك دليل مثير للتساؤل، اكتشفه كورت غودل في عام 1930، يقول بأن ما من إمكانية لإثبات اتساق نظرية المجموعة على نحو قاطع. يبدو أن النهائيين لن يُضطروا يوماً ما إلى الاقتناع بأن المجموعات اللانهائية موجودة.

لم تُثر مسألة في الرياضيات جدلاً أكثر من مسألة وجود اللانهاية الرياضية أو عدمه. وسنعود إلى بعض هذه الإشكاليات في الفصل الأخير. في الوقت الحالي، لنقرأ كلمات كانتور في المرحلة الحديثة من هذا الجدال القديم:

«الخوف من اللانهاية هو شكل من أشكال قصر النظر الذي يدمِّر إمكانية رؤية اللانهائي الفعلي، على الرغم من أنه خلقنا وغذَّانا في أعلى شكل له، ويظهر في أشكاله الثانوية فوق المنتهية في كل مكان حولنا وحتى في عقولنا»[37].

إنها كلمات قوية! ولكن ماذا يعني كانتور بقوله إن أعلى شكل من اللانهاية خلقنا؟ تابعوا القراءة!

Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 374. –37

اللانهاية المطلقة

يوجد نوع معين من الكينونة غير المادية لم نناقشه بعد. الإله، الكون، مشهد العقل، والفئة الخامسة من كل المجموعات (والتي سنناقشها فيما بعد)؛ إن كل ما سبق ترجمة لما يسمِّيه الفلاسفة بـ «المطلق». تُستخدَم كلمة «المطلق» هنا بمعنى «لا نسبي ولا شخصي». يوجد المطلق بذاته، وفي أعلى درجة ممكنة من الكمال.

كما ذكرت سابقاً، رأى أفلوطين أن الواحد لا يمكن أن يكون محدوداً بأي شكل من الأشكال. ويقول توما الأكويني، اللاهوتي المثالي: «إن مفهوم الشكل يتحقق على نحو كامل في الوجود نفسه. ووجود الإله ليس مُحدَثاً بأي شيء، فالإله يوجِد نفسه بنفسه. لذا من الواضح أن الإله كامل ولا يحدُّه شيء»[38].

عبَّر القديس غريغوريوس عن لامحدودية الإله على نحو أقرب إلى اللانهائي الرياضي بقوله: «مهما تقدَّم عقلنا في التفكُّر في الإله، فإنه لن يصل إلى ما هو عليه، ولكن إلى ما تحته فحسب»[39]. لدينا هنا بداثيات الجدلية اللانهائية التي تظهر عند محاولتنا، على نحو منهجي، بناء صورة لمشهد العقل بأكمله.

لنفترض أني أريد أن أضيف فكرة تلو الفكرة إلى عقلي، حتى يصل عقلي إلى درجة يملأ فيها مشهد العقل بأكمله. عندما أقوم بذلك، فإني

38- Saint Thomas Aquinas, *Summa Theologiae*, Ia.7.1.

39- مقتبس من: Allen Wolter, «Duns Scotus on the Nature of Man's Knowledge of God», Review of Metaphysics (1.2, 1941), p. 9.

أجمع مجموعةِ من الأفكار معاً في فكرة واحدة T. الآن، بعد أن أصبح واعياً بحالة عقلي T، أدرك أن هناك فكرة جديدة لم أضفها بعد... لذا أقوم بتحسين صورتي عن مشهد العقل بإضافة T ذاتها إلى الفكرة التي تحوي جميع عناصر T، على نحو موضوعي.

التفكير بالفكرة T مع 'T' — التفكير بالفكرة T

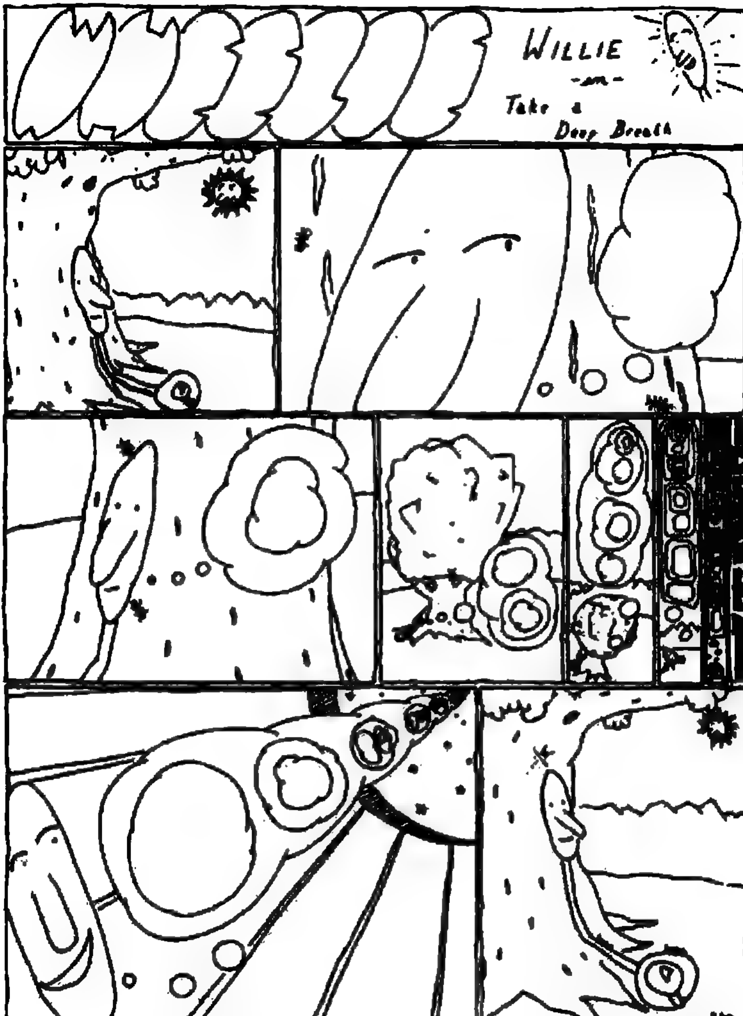
الشكل 28

إن هذه عملية جدلية بمعنى أن المكوِّن الفكري هو صورة اللاوعي الآنية للمطلق، والمكوِّن العكسي هو إضفاء الوعي على هذه الصورة، والمكوِّن المصطَنع هو تشكيل اللاوعي صورة جديدة للمطلق، والتي توحِّد الصور السابقة والوعي بأنها غير كافية[40].

يمكن أن تُفهم هذه المعلومة بوضوح إذا بدأنا بـلا شيء، كما في الكرتون المصوَّر[41] في الشكل29. نلاحظ أن ما يحدث في كل نقلة هو أن الشخص يشكِّل فكرة تحتوي على مجموعة الأفكار السابقة كعنصر بالإضافة إلى الفكرة الأخيرة ذاتها. وإذا نظرنا بطريقة أخرى، نجد أن الفِكر في كل مرحلة يحتوي على جميع الأفكار السابقة كعناصر.

40- اقترح ويليم سموول علي هذه الفكرة حول هيغل: «A Note on Dialectics in Mathematics», Iowa .Academy of Science, Vol. 67, 1960, pp. 389-393.

41- الكرتون المصوَّر لشخصية «ويلي ويلي»، وهي شخصية كنتُ أستخدمها في بعض الأحيان في صحيفة The Daily Targum لجامعة روتجرز، عندما كنتُ في كلية الدراسات العليا هناك.



الشكل 29

يمكن صياغة تعريف رياضي استقرائي مما سبق- بأن كل مجموعة أفكار تحوي جميع الأفكار السابقة لها- كما يلي:

$$T_0 = \emptyset \text{ و } T_{n+1} = T_n \cup \{T_n\}$$

ربما تساءل بعض القرّاء عما إذا كانت الفكرة T مضافاً إليها «T» كمجموعة تختلف فعلاً عن الفكرة الأولى T. والجواب هو: ليس دائماً. في القسم السابق كنا ننظر إلى العقل M الذي يحوي نفسه كعنصر من مكوناته. إن مجموعة مثل M مدركة تماماً لذاتها، ولا تختلف المجموعة عنها مضافة إلى ذاتها. وفي لغة المصطلحات: $M \cup \{M\} = M$.

يبدو أن الإله خصوصاً، يجب أن يكون قادراً على تكوين صورة ذهنية دقيقة عن نفسه. وطالما أن مشهد العقل هو عقل الإله، فإن ما أقوله هو أن أحد العناصر الموجودة في مشهد العقل يجب أن يكون مشهد العقل نفسه. ولأنه يمكن للمرء -من حيث المبدأ- من خلال وعيه إدراك أي كائن في مشهد العقل، فمن الممكن لعقولنا أن تصل فعلاً إلى صورة للإله أو لمشهد العقل بأكمله.

يتعارض ذلك مع قول غريغوريوس والشعور العام بأن المطلق غير قابل للمعرفة والإدراك. لأن هناك نوعين من المعرفة: العقلانية والصوفية.

إذا كان شيء ما عقلانياً، إذاً فهو مبني من أفكار أبسط، والتي بدورها مبنية من أفكار أبسط. ولا يكون هذا التسلسل لانهائياً، بل يمرّ عبر عدد منتهٍ من المراحل قبل الوصول إلى تصورات وأفكار بسيطة غير قابلة للتحليل. على سبيل المثال، يمكن أن تتكون فكرتي عن «منزل» من مجموعة من الأفكار الأبسط، تبدأ مثلاً من مجموعة أفكار عن أنواع المنازل، وكل فكرة منها تتكون من مجموعة أفكار عن مكونات المنزل، والتي يمكن تفسيرها أيضاً بأفكار بسيطة مثل المشي والرؤية والدفء.

إذاً لإيصال فكرة عقلانية، نبدأ بإظهار مكونات الفكرة، ثم كيف تتناسب المكونات معاً. ولكن إذا كانت إحدى مكونات الفكرة النهائية هي الفكرة النهائية ذاتها، فإن هذا التواصل العقلاني سيقع في نكوص لانهائي؛ لن يستطيع المرء الانتهاء من شرح الفكرة إلا إذا انتهى فعلاً من شرحها.

إن المطلق لا يقبل التفكير به باستخدام الأفكار العقلانية. ولا توجد طريقة غير دائرية للوصول إليه من الأسفل. وأي معرفة حقيقية للمطلق يجب أن تكون صوفية، في حال كانت المعرفة الصوفية أمراً ممكناً بالفعل.

ليس لدى الرياضيات والفلسفة عادة الكثير لقوله عن الطريقة الصوفية

لمعرفة الأشياء. من الناحية الصوفية، من الممكن تجربة رؤية مباشرة لمشهد العقل بأكمله. ولا يمكن إيصال هذه الرؤية بشكل عقلاني للأسباب الموضَّحة سابقاً. وبالطبع يمكن توصيل المعرفة الصوفية بطريقة غير مباشرة، على سبيل المثال، بإعداد الشخص من خلال القيام ببعض التمارين البدنية والروحية. ولكن، في نهاية المطاف، يصل المرء إلى المعرفة الصوفية دفعة واحدة أو لا يصل على الإطلاق. لا يوجد مسار تدريجي يمكن من خلاله بناء المجموعة *M* التي تحتوي على *M* كأحد عناصرها.

حتى لو افترضنا أن المعرفة الكاملة للمطلق ممكنة عبر التصوف فحسب، فلا يزال بإمكاننا مناقشة المعرفة الجزئية له بعقلانية. الشأن ذو الأهمية في مشهد العقل والمطلقات الأخرى أنها لانهائية فعلياً. في الواقع، في عام 1887، نشر ريتشارد ديديكايند برهاناً على أن مشهد العقل لانهائي، والذي سمَّاه عالَم الفكر (بالألمانية Gedankenwelt)[42].

كانت حجة ديديكايند على لانهائية مشهد العقل أنه بفرض «*s* فكرة محتملة» من النوع العقلاني غير المُمَثَّل ذاتياً، إذاً فكل عنصر من المتتالية اللامنتهية *s*، *s* {فكرة محتملة، *s* فكرة محتملة لفكرة محتملة، ...} سيحتويها مشهد العقل، وبالتالي مشهد العقل لانهائي.

توجد حجة مشابهة تثبت أن ما يُعرف في نظرية المجموعة بفئة كل المجموعات ، هي مجموعة لانهائية أيضاً. تضمّ هذه المجموعة جميع المجموعات، وتُعرف أيضاً بـ «مطلق كانتور».

صاغ ديديكايند حجته بعد ظهور حجة في مفارقات برنارد بولزانو حول اللانهاية (حوالي عام 1840):

«تظهر فئة الافتراضات الحقيقية لانهائيةً بوضوح. لأننا إذا ركّزنا انتباهنا على أية حقيقة مأخوذة عشوائياً...، وأسميناها *A*، نجد أن الافتراض الذي تحمله عبارة «*A* صحيحة» يختلف عن الافتراض *A* ذاته...»[43].

42- Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers* (New York: Dover Publications, .1963), p. 64. Originally appeared in 1872.

43- Bernard Bolzano, *Paradoxes of the Infinite* (London: Routledge and Kegan Paul, 1950), pp. 84-85.

إذاً نجد أن مشهد العقل وفئة كل المجموعات ومجموعة الافتراضات الحقيقية جميعها لانهائية. هل يضمن ذلك وجود أشياء لانهائية؟ ليس تماماً. فما ذُكر لا يوجد ككائنات، كوحدات، كأشياء محددة أو كاملة.

بعبارات أبسط، ليس من الصعب إثبات لانهائية الإله... لكن ماذا إن لم تكن تؤمن بوجود إله؟ قد يبدو صعباً الشك بوجود المطلقات اللاشخصية الأخرى، مثل مشهد العقل أو «كل شيء»، لكن هناك من يشك بوجودها أيضاً. والقضية هنا هي نسخة من المشكلة الفلسفية القديمة حول الواحد والكِثرة. والسؤال هو ما إذا كان الكون موجوداً ككائن عضوي واحد، أم إنه مجرد كِثرة بدون تماسك أصلي. على سبيل المثال، من الصحيح أن مشهد العقل لا يوجد كفِكر عقلاني واحد، فلو كان واحداً لكان عنصراً من ذاته، وبالتالي لا يمكن معرفته إلا بوميض من الرؤية الصوفية. لا يوجد فِكر عقلاني عنصر من ذاته، لذا لا يمكن لأي فِكر عقلاني أن يوحِّد مشهد العقل في واحد.

تُقيَّد كلمة «مجموعة» عادة، بحكم تعريفها، لتنطبق فحسب على المجموعات التي ليست عناصر من ذاتها. تحت هذا التعريف، لا يمكن لفئة كل المجموعات V أن تكون مجموعة، لأنها تحتوي ذاتها كعنصر فيها. وبالتالي، تصبح V كثرة لا يمكن أن تشكِّل واحداً.

لنفترض أننا لا نؤمن بالمقياس الدائري، وأن أي شيء مادي ليس جزءاً أو عنصراً من نفسه. هل الكون-أي مجموع كل الأشياء المادية- شيء؟ إذا كان شيئاً، فيجب أن يكون الكون عنصراً من ذاته، وهذا ما لا نسمح به. لذا فإن الكون ليس شيئاً، بل هو الكِثرة التي لا يمكن أن تكون واحداً.

نجد فقرة ذات صلة وثيقة بذلك في رسالة كتبها كانتور إلى ديديكايند عام 1905:

«يمكن أن يقود الافتراض بأن جميع عناصر الكِثرة مجموعة معاً إلى تناقض، لذا من المستحيل تصور الكِثرة كوحدة، أي كـ«شيء واحد». أدعو

ظهر هذا الكتاب للمرة الأولى عام 1851، بعد وفاة بولزانو بثلاثة أعوام. قدَّم بولزانو نموذجاً حديثاً لنظرية المجموعة، كما اعتمد تعريفاً مختلفاً عن كانتور للأعداد فوق المنتهية.

الكِثرة لانهاية مطلقة أو كِثرة لامتسقة. وكما نرى بسهولة، فإن كل ما يمكن تصوره، هو كِثرة...»[44].

مرة أخرى، نجد أن تفسير التناقض هو أنه لا يمكن لمجموعة الأفكار العقلانية أن تكون عنصراً في ذاتها، فهي بذلك تنتهك العقلانية (حيث تعني «العقلانية» عدم التمثيل الذاتي). والنتيجة النهائية لكل ذلك أن الإله، ومشهد العقل، وفئة كل المجموعات V، ومجموعة كل الافتراضات الحقيقية، تبدو جميعها لانهائية، لكن يمكننا على الأقل أن نتساءل عما إذا كان أي من هذه المطلقات موجوداً ككيان واحد. ومن المؤكد أنها لا توجد ككيانات يمكن للتفكير العقلاني أن يستوعبها.

44- Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 443. قام بترجمة هذه الرسالة المهمة ستيفان بور-منغلبيرغ في: Jean van Heijenoort, ed., *From Frege to Gödel* (Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967), p. 114.

روابط وعلاقات

في هذا القسم، أود أن أستكشف بعض الروابط بين مختلف أنواع اللانهايات التي ناقشناها حتى الآن[45]. في المقالة التي كتبها كانتور عام 1887 بعنوان «مساهمات في دراسة فوق المنتهي»[46]، يقتبس مقطعاً من خلاصة توما الأكويني، ويصرِّح لمرات عديدة أن هذا المقطع يظهر

45- من الممكن تجريدياً، بغض النظر عما سأناقشه في هذا القسم، إثبات إحدى وجهات النظر الثمانية بالنسبة لوجود أو عدم وجود الأنواع الثلاثة للانهاية (الرياضية، الفيزيائية، المطلقة). ومن الممتع أن نحاول إيجاد تمثيل لكل من الحالات الثمانية. وأدرج فيما يلي إحدى هذه التمثيلات التي عملت عليها. ويجب أن أشير هنا أن معظم المفكرين لم يذكروا رأياً صريحاً حول جميع الأنواع الثلاثة من اللانهاية، لكن وجهات نظرهم تتوافق مع ما أدرج في الجدول.

	[redacted]	[redacted]	[redacted]
أبراهام روبنسون	لا	لا	لا
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
توما الأكويني	لا	لا	نعم
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
ديفيد هيلبرت	نعم	لا	لا
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
كورت غودل	نعم	لا	نعم
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]

46- *Contributions to the Study of the Transfinite* by George Cantor.

الاعتراضين الوحيدين المهمين حقاً اللذين أُثيرا ضد اللانهائي الفعلي[47]. لنقرأ هذا المقطع:

«من المستحيل وجود كِثرة لانهائية فعلية.

1. عند التفكير بأي مجموعة من الأشياء، يجب أن تكون مجموعة معينة. وتُعيَّن المجموعات بعدد العناصر الموجودة فيها. ما من عدد لانهائي، لأن الأعداد تنتج من الاستمرار بمجموعة من الوحدات. لذا لا يمكن لأي مجموعة أن تكون لامحدودة فعلاً من الأصل، ولا أن تصبح لامحدودة.
2. مرة أخرى، كل مجموعة من الأشياء الموجودة في العالم، هي مخلوقة، وأي شيء مخلوق له هدف وضعه خالقه، فالأسباب لا تعمل أبداً بدون نتائج. كل الأشياء المخلوقة تتبع كِثرة محددة. وبالتالي لا يمكن لعدد لامحدود من الأشياء أن يوجد بالفعل»[48].

يبدو واضحاً أن النقطة الأولى للأكويني هي أن المجموعة اللانهائية لا توجد إلا بوجود أعداد لانهائية، وهو يعتقد بعدم وجود أعداد لانهائية. تقف نظرية كانتور للأعداد فوق المنتهية كجواب وحيد مناسب على فكرة الأكويني. اعتُبر مفهوم الأعداد اللانهائية الفعلية غير متماسك لسنوات عديدة. ولم تتطور نظرية متسقة ومعقولة عن هذه الأعداد حتى أواخر القرن التاسع عشر على يد كانتور. وكما يلاحظ كانتور في جداله لاعتراض الأكويني، أن الاعتراض على وجود مجموعات لانهائية فعلياً يُواجَه بعرض نظرية الأعداد اللانهائية.

ليست النقطة الثانية من اعتراض الأكويني واضحة، وقد تكون مجرد تنويع عن النقطة الأولى. تقول النقطة الثانية إن أي مجموعة مخلوقة، وإن أي مخلوق له هدف، وكل هدف هو أمر محدّد ومنته. إذا كان هذا ما يقصده فعلاً، فيمكننا القول إن النظرية الكانتورية للمجموعات اللانهائية تقدِّم ردّاً على هذه النقطة أيضاً.

47- Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 378–439.

48- Saint Thomas Aquinas, *Summa Theologiae*, Ia.7.4.

إن وجهة النظر الكاملة للأكويني عن اللانهاية لا يمكن الدفاع عنها، لأنه رأى أن الإله الخالق لانهائي، ولكن ما من مخلوق لانهائي. يتناقض ذلك مع مبدأ معروف ومقبول على نطاق واسع من مبادئ نظرية المجموعة، يُعرف بمبدأ الانعكاس، وينصُّ على ما يلي: لكل سِمة قابلة للتصور من سِمات *V*، توجد مجموعة ما –من *V*– تتمتع بهذه السمة. حيث *V* هي الفئة التي تحوي كل المجموعات، أو المطلق حسب كانتور. وبعبارة فلسفية يمكن القول: يشارك المطلق كل سِمة من سماته مع كيان واحد على الأقل من الكيانات التي يحتويها ضمنه؛ أو كل خاصية قابلة للتصور من خصائص مشهد العقل، هي أيضاً خاصية لفكرة ما محتمَلة موجودة ضمنه.

الدافع وراء مبدأ الانعكاس هو أن المطلق يجب أن يكون غير قابل للتصور على الإطلاق. ويمكن تفسير ذلك: إذا كان هناك خاصية *P* ينفرد بها المطلق، فعندها يصبح المطلق قابلاً للتصور على أنه «الشيء الوحيد الذي يملك الخاصية *P*». ومبدأ الانعكاس يمنع حدوث ذلك، من خلال التأكيد على أن أي خاصية قابلة للتصور يمكن قرنها بأفكار عقلانية أصغر من المطلق، والتي تعكس فحسب وجه المطلق، الذي يمكن القول إنه يملك هذه الخاصية أيضاً.

لنلاحظ معاً مثالاً لحجة مبدأ الانعكاس. لتكن لدينا الخاصية: لكل فكرة *S* في مشهد العقل، توجد أيضاً فكرة «*S* هي فكرة محتملة». ومن خلال مبدأ الانعكاس، سيكون هناك فِكر *W* يحتوي الفكرة *S*، ويحوي أيضاً فكرة «*S* هي فكرة محتملة». إذاً الفِكر *W* يعكس، أو يشارك، الخاصية المذكورة لمشهد العقل. لكن نلاحظ أيضاً أن الفِكر *W* يجب أن يكون لانهائياً لوجود عدد لانهائي من الأفكار، وبالتالي يوجد فِكر لانهائي.

النقطة التي أشير إليها هي أن القبول بوجود أي مطلق لانهائي، يُلزم بالقبول بوجود أفكار ومجموعات لانهائية. لأن أي إنكار لمبدأ الانعكاس هو عملياً التأكيد على إمكانية وصف المطلق على نحو نهائي، وهو أمر غير منطقي أبداً.

كما يحتوي المقطع الذي أشرت إليه سابقاً لأوغسطين على نوع من

حجة مبدأ الانعكاس لحقيقة مجموعة الأعداد الطبيعية. يجادل أوغسطين بأن الإله يجب أن يعرف كل عدد طبيعي وأن يعرف حتى «اللانهايات» في الشكل الذي تُجمع فيه كل الأعداد الطبيعية دفعة واحدة، وإلا فقدرته محدودة. وفقاً لأوغسطين، الإله يكون وراء الأعداد الطبيعية.

تلخيصاً للنقاط المذكورة في هذا الفصل، نجد:

1. يوحي اللامتناهي عادة بشعور بالضعف والعجز واليأس، لذا كان الدافع البشري الطبيعي هو رفضه وإقصاؤه.
2. لا توجد أدلة قاطعة على أن كل شيء منتهٍ؛ وتبقى مسألة وجود شيء لانهائي مسألة مفتوحة وتجريبية.
3. هناك أنواع مختلفة من اللانهائيات الفيزيائية يمكن أن توجد فعلياً: الزمن اللانهائي، الفضاء اللانهائي في الكِبَر، الأبعاد اللانهائية للكون، الاستمرارية اللانهائية للفضاء، القابلية اللانهائية لانقسام المادة. من حيث المبدأ، يمكن تجنُّب كل هذه اللانهائيات، لكن هل الكون يتجنُّبها أم لا؟
4. في نظرية المجموعات التي وضعها كانتور، لدينا عدد كبير من المجموعات اللانهائية. توفّر هذه النظرية البسيطة والمتماسكة إطاراً منطقياً لمناقشه اللانهايات. إضافة لذلك، إذا شعرنا أن الأشياء التي يناقشها علماء الرياضيات حقيقية، فيمكننا استنتاج أن اللانهايات الفعلية موجودة.
5. تؤدي محاولات التحليل المنطقي لظاهرة الوعي والوعي الذاتي إلى نكوص لانهائي. وربما يشير ذلك إلى أن الوعي لانهائي في الأساس.
6. المطلق لانهائي بالتأكيد. لذا على المرء إما أن ينكر حقيقة المطلق أو يقبل وجود لانهاية واحدة على الأقل.
7. وفقاً لمبدأ الانعكاس، مجرد القبول بالمطلق اللانهائي، يعني قبول عدد من اللانهائيات المُحتمَلة أيضاً.

ألغاز ومفارقات الفصل الأول

1. يُقال: إذا كان هناك عدد لانهائي من الكواكب، فإن كل كوكب مُحتمَل موجود. مثلاً، سيوجد كوكب مطابق للأرض، باستثناء وجود مخلوقات أسطورية تعيش عليه. هل يصحُّ ذلك؟

2. لنفترض أن هناك مصباحاً في غرفتك، وأنه سيُضاء يوماً ويُطفأ في اليوم التالي بالتناوب إلى الأبد. والسؤال: هل سيكون مُضاءً أم مُطفأً بعد مرور عدد لانهائي من الأيام؟

3. يوجد لكل مشاهِد للنجوم في الكون حدٌّ أعلى لعدد النجوم الذي يمكنه رؤيتها. إذاً كل مشاهِد للكون منتهٍ. هل يعني ذلك أن الكون منتهٍ؟

4. عند قولنا «لدي خمسة أصابع في كفِّي»، فإننا نعني أن آخر عدد نصل إليه عندما نعدُّ أصابعنا هو العدد خمسة. إذاً، ما الذي تعنيه عبارة «لدي عدد لانهائي من الأصابع في كفِّي»؟

5. لنفترض أننا وجدنا عدداً لانهائياً I، وهو أكبر عدد معروف، هل سيوجد العدد $I+1$؟

6. في مجال «الهندسة الحسابية» غير المعروف كثيراً، يُقال: يوجد عدد لانهائي من النقاط في الخط المستقيم وعدد لانهائي من النقاط المزدوجة في المستوي. ويوجد عدد لانهائي من المستقيمات المزدوجة في المستوي[49]. كم عدد الدوائر التي توجد في المستوي إذاً؟ وكم عدد القطوع الناقصة؟

49- David Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination* (New York: Chelsea, 1952), p. 159.

7. هل يمكنك، بدون استخدام الحجج الدائرية، إثبات أن العدد 7 هو عدد منتهٍ؟

8. مرَّ على الكون 10^{10} سنة منذ الانفجار العظيم. تحوي السنة على $3^{*}10^{7}$ ثانية. وفقاً لميكانيك الكم، لا يمتد الإدراك العادي للزمن على فواصل زمنية أقصر من $5^{*}10^{-44}$، لذلك يمكن أن نعتبر هذه الوحدة نوعاً من «اللحظات»، وهي أسرع من أي شيء يمكن أن يحدث. إذاً كم من هذه «اللحظات» مرَّ منذ الانفجار العظيم حتى الآن؟ هل المنطقي النقاش بأن الأعداد الأكبر، مثل 10^{100} لم توجد بعد؟

9. لنقل إن الفضاء الذي نعيش فيه لامتناهٍ في الكِبَر. ولنتخيل مستقيماً *L* يمتد عبر هذا الفضاء. سيمتد هذا المستقيم لمسافة تصل إلى عدد لانهائي من الأقدام، وإلى عدد لانهائي من الياردات أيضاً. لكن كل يارد يساوي ثلاثة أقدام، إذاً طول المستقيم اللانهائي بالياردات أكبر بثلاثة أضعاف من طوله اللانهائي بالأقدام. كيف يمكن للانهاية أن تساوي ثلاثة أضعاف من لانهاية أخرى؟[50].

10. إليكم مثالاً عن النكوص اللانهائي. لنفترض أن لدينا نصّاً يحوي على كلمة <u>man</u> عدة مرات، ونريد استبدالها بكلمة wo<u>man</u>. بعد أن نستبدل كل <u>man</u> بـ wo<u>man</u>، سيكون علينا استبدال كل wo<u>man</u> بـ wowo<u>man</u>، ثم بـ wowowo<u>man</u>، وهكذا. إلى أين سنصل في ذلك؟

أجوبة ألغاز الفصل الأول

1. لا، لا يصح ذلك. يمكننا إثبات ذلك اعتماداً على تشبيه عددي. إذا

50- يظهر هذا المثال في: Louis Couturat, *De l'Infini Mathématique,* (Paris: Baillière & Co., 1896), p. 474. ويمثّل هذا الكتاب دفاعاً عن النظرية الكانتورية الجديدة عن الأعداد فوق المنتهية. تعرَّضت نظرية كانتور، في ذلك الوقت، إلى الكثير من النقد من بعض الفلاسفة الذين لم يفهموا الفكرة الرياضية في هذه النظرية تماماً. ويوجد دفاع آخر عن نظرية كانتور في:

Constantin Gutberlet, *Das Unendliche, metaphysisch and mathematisch betrachtet* (Mainz: G. Faber, 1878).

كان غوتبرلت رجل دين، وكتابه هذا يصبّ في مجموعة الأدلة على لانهائية الإله.

كان E هو الكون الذي يضمّ كل الأعداد الزوجية، فذلك لا يعني أنه يشمل الأعداد كلها. بالرغم من أنه يحوي عدداً لانهائياً من الأعداد الزوجية، إلا أنه لا يضمّ الأعداد الفردية. وبالمثل، فإن مجموعة شاملة من الكواكب هي مجموعة لانهائية، لكن ليس بالضرورة أن تكون أي مجموعة لانهائية مجموعة شاملة.

2. في الواقع، قد يكون المصباح مُضاءً أو مطفأً بعد عدد لانهائي من الأيام. لا تكفي المعلومات حول هذه الحالة لاستقراء نتيجة ما بعد زمن لانهائي. لكن ما يثير الاهتمام في هذا السؤال هو إمكانية الإجابة عليه بكلتا الإجابتين. مُضاء: يُطفأ المصباح ثم نعيد إضاءته فوراً. لذا في أي مرة نطفئه، سيُضاء في النهاية. مُطفأ: يُضاء المصباح ثم نعيد إطفاءه فوراً. لذا في أي مرة نضيئه، سيُطفأ في النهاية. سنناقش ذلك مجدداً لاحقاً في «سلسلة غراندي».

3. لا، لا يعني ذلك. جادل كانط في أحد كتبه في هذه النقطة، لكن الجدال ينطوي على مغالطة. إذا كان كل عدد طبيعي منتهياً فذلك لا يعني أن مجموعة كل الأعداد الطبيعية منتهية. وبالنظر إلى السؤال، يمكن القول إن وجود عدد لانهائي من المشاهدين للكون، يعني أن مجموعة مشاهداتهم لانهائية أيضاً.

4. يعني أن لديك عدداً من الأصابع يساوي لانهاية1+. هناك أمر رائع حول اللانهاية، وهو أن ما من أحد يمكنه العد حتى يصل إليها. وأن تعد عدداً لانهائياً من الأصابع يعني أن تستمر بالعد بدون أن تصل أبداً إلى إصبع أخير. إذا وُجد إصبع يحمل العدد ، فذلك يعني أن لديك عدداً لانهائياً من الأصابع بالإضافة إلى إصبع آخر.

5. لا يمكن أن يوجد العدد I+1، لأن وجوده يقتضي أن يكون أكبر من I الذي يُفترض أنه أكبر عدد. ولكن عندما يوجد عدد ما ، فإن العدد $x+1$ يوجد

أيضاً. وإذا لم يوجد العدد $x+1$ فإن x لا يوجد. وبالتالي، العدد I لا يوجد. لذا نصل إلى حقيقة عدم إمكانية معرفة أكبر عدد ممكن. وما سبق هو نسخة من مفارقة «بورالي فورتي»، والتي سنناقشها لاحقاً. لكن توجد مشكلة في استنتاجنا عدم وجود عدد أكبر، وهو أننا نفترض أوميغا الكبيرة Ω، اللانهاية المطلقة، هي العدد الأكبر. ولنخرج من هذه الصعوبة نقول إن Ω هي العدد الأكبر، لكن لا يمكننا الوصول إليها أبداً لنشكِّل $\Omega+1$.

6. عند رسم دائرة عشوائية في مستو، لدينا ثلاث درجات من الحرية: اختيار موقع مركز الدائرة بالنسبة للمحور x، وبالنسبة للمحور y، واختيار نصف القطر. وبالتالي لدينا ∞^3 من الدوائر في المستوي.

وعند رسم قطع ناقص لدينا خمس درجات من الحرية: اثنتان لاختيار المركز، وواحدة لطول المحور الرئيسي، وواحدة لطول المحور الثانوي، وواحدة للزاوية التي يصنعها المحور الرئيسي مع خط الأفق. إذاً، لدينا ∞^5 من القطوع الناقصة في المستوي.

7. نعم، إذا قلنا إن $3+4=7$، وكل من 3 و4 هما عددان منتهيان، ومجموع كل عددين منتهيين هو عدد منته. أما الإثبات غير المقبول هو القول إن $1+1+1+1+1+1+1=7$، لأننا نفترض هنا أن السلسلة المكونة من سبع واحدات هي سلسلة منتهية، وهذا بالضبط ما يجب إثباته. كما لا يمكن إثبات محدودية العدد 7 بالاعتماد على أن العدّ إلى 7 يتضمن سبع خطوات. ومن الممكن على نحو تجريدي تخيل كائنات رياضية يمكن أن نعدّ من خلالها لنصل إلى أعداد لانهائية بدون أن نلاحظ أي خطأ!

8. الجواب هو 6^*10^{60} لحظة حتى الآن. أما إذا كان المرء ينظر إلى تلك الأعداد التي لا يمكن أن توجد مادياً على أنها حقيقية، فهذا أمر قابل للنقاش. أميل إلى القول إن عالَم الرياضيات موجود -ومستقل عن- العالم المادي وأفعال البشر. بالمناسبة، في ميكانيكا الكم، يُطلق على الحد الأدنى لطول

زمني ممكن ذو معنى «لمح البصر»، كما في القول «سأعود بلمح البصر». و«لمح البصر» هو 10^{-44} أو 10^{-43} من الثانية! ويمكن العثور على نقاش حول «لمح البصر» في *Paul Davies, Other Worlds, (Simon & Schuster, New York 1980).*

9. تختلف رياضيات اللانهاية عن رياضيات الأعداد المألوفة. ولا تتساوى اللانهاية مع ثلاثة أضعافها من ناحية الأعداد المألوفة. لكن من ناحية الأعداد الأصلية، وهو المعنى المقصود هنا، فإن اللانهاية تساوي ثلاثة أضعافها. وهذا المثال دليل على هذه الحقيقة.

10. عدد لانهائي من «wo» في كل مرة.

الفصل الثاني

كل الأعداد

سنبدأ هذا القسم بتتبع تطور نظام الأعداد الحقيقية المألوفة مع لانهائية أعداده غير النسبية. وبمجرد قبولنا الأعداد غير النسبية، ينتفي وجود سبب منطقي لعدم قبولنا الأعداد اللامتناهية في الكِبَر أو الأعداد فوق المنتهية. وسيُخصص القسم الثاني من الفصل للأعداد الأصلية والترتيبية فوق المنتهية. تشكِّل الأعداد الترتيبية متتالية مليئة بالثغرات تشبه إلى حدٍّ ما الأعداد الطبيعية. من الطبيعي أن نملأ هذه الفراغات بأقصى كثافة ممكنة، تماماً كما نملأ الفراغات بين العددين 2 و3 مثلاً بالأعداد المنطقية والحقيقية. وعند امتلاء هذه الفراغات بأكبر قدر ممكن، فإننا نصل إلى ما يمكن تسميته *بالترتيب المستمر المطلق*. وسأقدِّم بعض الأمثلة على هذا الترتيب في القسم الخاص بالأعداد اللامتناهية في الصِّغَر والأعداد السريالية، والذي يمكن اعتباره يشمل «كل الأعداد» (بما فيها الأعداد اللامتناهية في الصِّغَر). وفي القسم الأخير من هذا الفصل، سأعود مرة أخرى إلى مسألة ما إذا كان للأعداد اللانهائية في الكِبَر وفي الصِّغَر أي وجود حقيقي، سواء كان فيزيائياً أو على نحو آخر.

من الفيثاغورية إلى الكانتورية

عاش فيثاغورس في اليونان وإيطاليا في القرن السادس قبل الميلاد، ويظهر كشخصية غامضة جداً ومتناقضة. من ناحية، كان فيثاغورس مُرشِداً وقائداً لطائفة دينية. ومن ناحية أخرى، كان له الفضل في ولادة الرياضيات الحديثة والفيزياء الرياضية.

يشتهر أتباع الفيثاغورية بإيمانهم بالتقمُّص أو التناسخ؛ ويؤمنون بوجود عقل أو روح كونية واحدة، وبأن المرء يحيا بقطعة صغيرة من هذه الروح تكون مسجونة في جسده، وأن هذه القطعة ستُحيي العديد من الأجساد الأخرى قبل العودة إلى الوحدة الكاملة مع الروح الكُلّيّة. ويلتزم الفيثاغوريون بعدد كبير من القواعد والمحظورات (لا تنظر أبداً إلى الوراء عند عبورك حدّاً ما، ابدأ خطواتك بقدمك اليمنى دائماً، لا تلتقط الطعام الذي يقع عن الطاولة)، والتي تبدو كمحاولة للانسجام والتناغم مع الكون؛ فإذا تمكن المرء خلال حياته من بناء علاقة وثيقة مع **الواحد**، ستكون الروح النابضة بالحياة قادرة -بمجرد الموت- أن تعود إلى المصدر بدلاً من أن تضطر إلى الدخول في جسد آخر.

قيل عن فيثاغورس إنه تذكَّر العديد من حيواته السابقة، كما أنه امتلك قوى خارقة أخرى أيضاً. وتروي الحكايات القديمة حوله قيامه بمعجزات عديدة، كرؤية الناس له في عدة أماكن منفصلة ومتباعدة في الوقت ذاته؛ وأنه ذات مرة عبر النهر، فسُمِع صوت النهر يقول له «السلام عليك يا فيثاغورس».

تُعتبر المفاهيم العددية جزءاً لا يتجزأ من المعتقدات الفيثاغورية. واعتُبرت الطبيعة الأساسية للكون عدديةً بطريقة ما، حيث تجسِّد بعض الأعداد مفاهيم مجردة معينة. ولدى الفيثاغوريين التعريفات التالية:

1 هو العقل (الواحد).

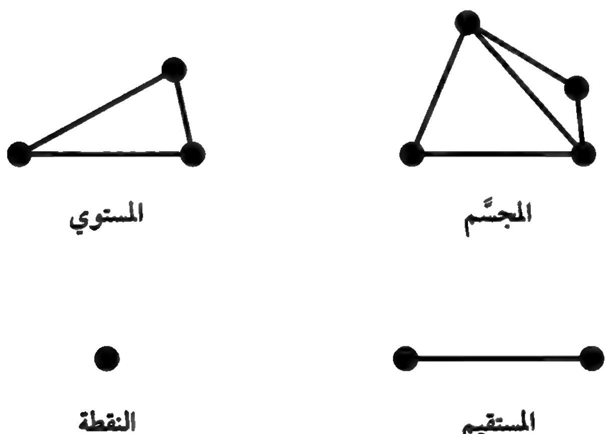
2 هي الفكرة (أول ما ظهر عن الواحد).

3 تمثِّل الكمال (البداية، والوسط، والنهاية).

4 هي العدالة (الإنصاف).

5 ترمز للزواج (لأن 3+2=5، وتُعتبر الأعداد الزوجية مؤنثة والأعداد الفردية مذكَّرة).

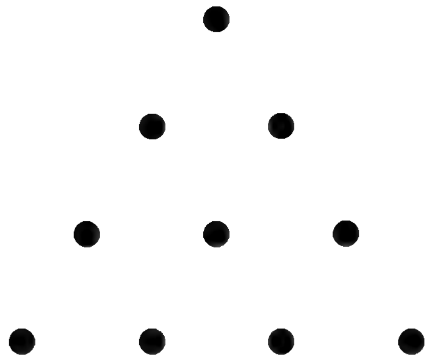
وفي نظام لاحق، تمّ تعريف الأعداد من الواحد إلى الأربعة بالنقطة والخط والمستوي والمجسَّم على التوالي.



الشكل 30

أُولي العدد عشرة اهتماماً خاصاً واعتبر رمزاً للكمال. وتبدو بعض أسباب ذلك واضحة: لدى الإنسان عشرة أصابع، كما تعتمد معظم أنظمة الترقيم على العدد عشرة. لكن من الأسباب الأهم لقدسية العشرة عند الفيثاغوريين هو أن: 4+3+2+1=10، وهي الأعداد التي تُعتبر –مع علاقاتها التبادلية مع بعضها البعض– الأعداد الرئيسية. وتُمثَّل هذه الحقيقة حول العدد عشرة بـ«المثلث الرباعي الفيثاغوري» الموضَّح في الشكل 31. لا بدّ أن أي

فيثاغوري سيستمتع بلعبة البولينغ، وسيشعر بالألفة في ممر الكرات التي تُصَفُّ بنهايته عشر قطع خشبية مرتبة وفق المثلث الرباعي الفيثاغوري.



الشكل 31

واتفاقاً مع قدسية العدد عشرة، افترض الفيثاغوريون أن هناك عشرة أجرام سماوية. في ذلك الوقت لم يكن هناك سوى تسعة أجرام سماوية معروفة (بدون احتساب النجوم)، لذلك افترضوا وجود كوكب معاكس للأرض لا يمكن رؤيته أبداً لأنه على الجانب المقابل من الشمس.

من المثير للاهتمام أن هذا النوع من الجدل هو الموضوع النموذجي في الفيزياء الرياضية الحديثة. على سبيل المثال، يحدث أن يضع العلماء مخططاً ثلاثي الأبعاد لجميع الجُسيمات الأولية المعروفة، ويبدو المخطط بشكل مجسَّم مثالي ذي اثني عشر وجهاً، مع زاوية واحدة مفقودة. ولأن الشكل سيبدو أكثر جمالاً واتساقاً بوجود جُسيم إضافي بخصائص محددة يملأ الزاوية المفقودة، يفترض الفيزيائيون وجود مثل هذا الجُسيم. والمثير للدهشة، أن مثل هذا الجدل ينتهي بإثبات صحيح: يكتشف العلماء أخيراً جُسيماً له الخصائص المتوقعة بالضبط.

إن الاعتبارات الرياضية المسبقة يمكن أن تؤدي إلى حقائق فيزيائية مثبَتة تجريبياً. وترتبط بنية الكون الفيزيائي ارتباطاً وثيقاً ببنية الكون الرياضي. وكان الفيثاغوريون مدركين لأمثلة على هذا الارتباط. على سبيل المثال،

هناك علاقة بين طول الوتر والنغمة التي تصدر عنه، فإذا كان لدينا وتران بطولين متناسبين وفق نسبة عددية بسيطة (1\2 أو 2\3 أو 1\4)، ستصدر نغمتان متناغمتان منهما.

كان الاستنتاج الذي استخلصه الفيثاغوريون، وفقاً لأرسطو، هو أن «عناصر الأعداد هي عناصر الأشياء، وأن الجنة بأكملها هي تناغم وعدد». ويذكر أرسطو مرة أخرى أن الفيثاغوريين «اعتبروا العدد جوهر كل الأشياء»[1].

لا تُعتبر وجهات النظر هذه غريبة في العِلم الحديث، الذي يرى إمكانية التعبير عن أي ظاهرة بالأعداد والتوابع والعمليات والمجموعات وما شابه ذلك. إذا اعتقدنا أن الكون بأكمله شكل بدون محتوى، وأن كل الأشكال التي تظهر في الطبيعة تقبل التمثيل الرياضي، حينها يمكن أن نستنتج منطقياً أن أي شيء موجود هو في نهاية المطاف كائن رياضي.

ليفكر أحدنا بحذائه، مثلاً، وسيجد أن بإمكانه تحديد حجمه وعَدَّ ثقوبه وحتى تحديد وزنه بالغرام. وبغضّ النظر عن هذه الجهود، فالحذاء موجود رياضياً كمجموعة إحداثيات النقاط التي تقع في مادة الحذاء نفسه. كما يتحدّد لون الحذاء بأطوال الموجات الضوئية المنعكسة من كل نقطة من الحذاء. أمَّا بالنسبة للجُسيمات الفعلية التي يتكون منها الحذاء، فهي تشوهات صغيرة في النسيج المنحني للزمكان. إذاً ليس من الغريب أن نشارك الفيثاغوريين اعتقادهم أن الواقع المطلق هو شكل رياضي دقيق.

محدود	لامحدود
واحد	كِثرة
سكون	حركة
مستقيم	معوجّ
جيد	سيىء

يبدو الأمر حسناً حتى الآن. لكن القصة تزداد إثارة للاهتمام. لم يؤمن الفيثاغوريون بوجود أشكال لانهائية. ويعود الفضل إليهم في إنشاء «جدول

1- Aristotle, Metaphysics, 985b & 987a, in Richard McKeon, ed., *The Basic Works of Aristotle* (New York: Random House, 1941), pages 698 & 700.

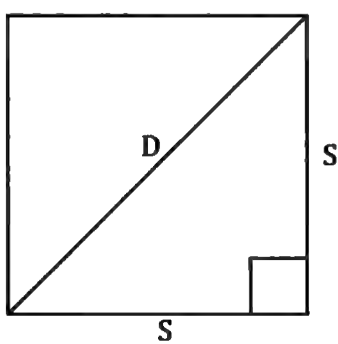
الأضداد»، والذي ذكرت جزءاً منه أعلاه. وبالنظر إلى هذا الجدول، يبدو واضحاً أن الفيثاغوريين لم يكونوا من المعجبين باللانهاية، وأنهم نظروا إليها كما نظر اليونانيون على أنها فوضى اللامحدود.

يمكننا أن نستنتج أنه إذا كان 1) كل شيء هو شكل رياضي، و2) لا يوجد شيء لانهائي، إذاً فكل شيء هو إمَّا عدد طبيعي أو علاقة بين أعداد طبيعية. ونلاحظ أنه يجب التخلي إمَّا عن 1) أو 2) في حال إثبات وجود بعض سمات العالَم التي لا يمكن أن تُمثَّل بعدد منتهٍ.

لنتخيل الآن ساحل جنوب إيطاليا، وأننا في قارب وسط مياه رائعة متلألئة وصخور جافة ووعرة، مع فيثاغورس نفسه وبعض من تلامذته في نزهة بحرية. يجلس فيثاغورس على سطح القارب ويتحدث مع هيباسوس، وهو أحد تلامذته اللامعي الذكاء، والذي يطرح فكرة تتجاوز الآفاق العقلية التي التزم بها فيثاغورس وأتباعه.

تقول الفكرة إن تطبيق قانون فيثاغورس لطول وتر المثلث القائم ($a^2+b^2=c^2$) في حالة المثلث المتساوي الساقين ذي طول الضلع 1، يوصلنا إلى أن طول الوتر هو $\sqrt{2}$، وهو عدد يمكن الإثبات على نحو قاطع بأنه «غير طبيعي»، وبدون اسم، ولانهائي.

تقول الروايات إن هذه الفكرة كلَّفت هيباسوس حياته، وأن الفيثاغوريين عادوا من رحلتهم البحرية بعد أن «غرق هيباسوس في البحر»!



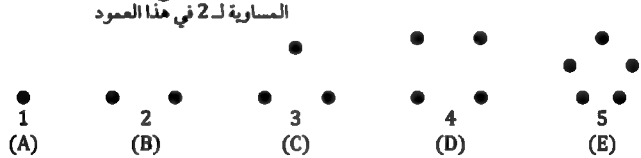
الشكل 32

تعبِّر فكرة هيباسوس، بلغة الرياضيات الحديثة، عن وجود عدد غير نسبي. ولكن في عصر فيثاغورس، كانت الفكرة تعبِّر عن شيء لا يمكن تمثيله بالأعداد، نظراً لأنهم لم يدركوا وجود نسب وأعداد أخرى غير الطبيعية، ودُعيت النسبة التي عرفها هيباسوس باليونانية alogos، أي «غير منطقي»، ودُعيت أيضاً arratos، أي «عدم وجود نسبة».

إن عملية البحث عن تمثيل لـ $\sqrt{2}$ على شكل كسر أو نسبة أو عدد طبيعي، هي عملية مثيرة للاهتمام. وتعادل مسألة إيجاد n من أجل m حيث $m^2/n^2 = 2n^2/n^2$. ويوضِّح الجدول أدناه بداية حل هذه المسألة. والغريب في الأمر أن بإمكاننا الادعاء بكل تأكيد أن عملية البحث هذه تبقى دون نتيجة إلى الأبد.

$$(2/2)^2 = 4/4 < 8/4 < 9/4 = (3/2)^2, \text{ so } 2/2 < \sqrt{2} < 3/2$$
$$(4/3)^2 = 16/9 < 19/9 < 25/9 = (5/3)^2, \text{ so } 4/3 < \sqrt{2} < 5/3$$
$$(5/4)^2 = 25/16 < 32/16 < 36/16 = (6/4)^2, \text{ so } 5/4 < \sqrt{2} < 6/4$$
$$(7/5)^2 = 49/25 < 50/25 < 64/25 = (8/5)^2, \text{ so } 7/5 < \sqrt{2} < 8/5$$
$$(8/6)^2 = 64/36 < 72/36 < 81/36 = (9/6)^2, \text{ so } 8/6 < \sqrt{2} < 9/6$$
$$(9/7)^2 = 81/49 < \underbrace{98/49}_{} < 100/49 = (10/7)^2, \text{ so } 9/7 < \sqrt{2} < 10/7$$

تستمر إلى الأبد مع الكسور
المساوية لـ 2 في هذا العمود

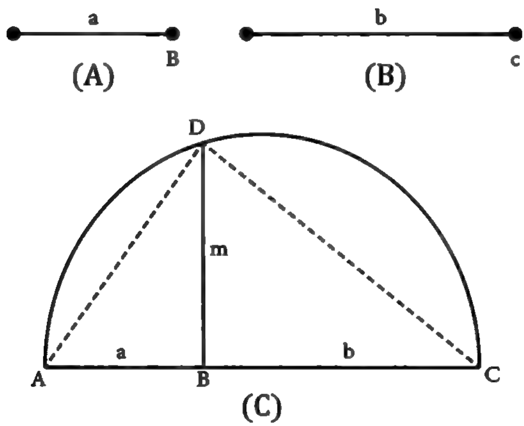


الشكل 33

كان عند اليونانيين نوعان من المقادير: منفصل ومستمر. يمكن للمقادير المنفصلة أن تُحسَب وأن تتوافق مع الأعداد الطبيعية، ويمكن تصوُّرها كنقاط. لكن المقادير المستمرة لا تتوافق ببساطة مع أي عدد على الإطلاق. وكما يمكننا جمع الأعداد ومضاعفتها، يمكننا التعامل مع المقادير المستمرة من خلال تقنيات تُعرف بالجبر الهندسي. طوَّر اليونانيون هذه التقنيات إلى النقطة التي تمكنوا فيها من حلّ معظم المعادلات التربيعية التي تنطوي على مقادير مستمرة.

لنأخذ التقنية الهندسية لإيجاد المتوسط الهندسي لقطعتين مستقيمتين a وb على سبيل المثال. يعني ذلك إيجاد طول القطعة المستقيمة m حيث $a:m::m:b$ (كما في الشكل 34). نوجد m على النحو التالي:

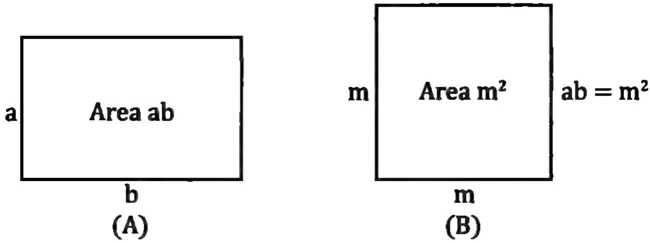
1. نضع a وb بجانب بعضهما البعض لنحصل على القطعة المستقيمة AC.
2. نرسم نصف الدائرة التي قطرها AC.
3. نرسم عموداً على AC في B ويلاقي نصف الدائرة في D، طول BD هو m.
4. $a:m::m:b$ لأن المثلثان ABD وDBC متشابهان.



الشكل 34

ونقول بلغة الرياضيات الحديثة إن m حل للمعادلة $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$، $a.b=x^2$، أو $x=\sqrt{(a.b)}$. تُذكر إمكانية حل المعادلة قبل الأخيرة في المسألة الرابعة عشرة من الكتاب الثاني لإقليدس «العناصر» أو «الأصول»، والتي تنصّ على أن «من الممكن إنشاء مربع بمساحة مساوية لمساحة أي مستطيل»[2].

2- *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Vol. 1 (Thomas Heath, ed., New York: Dover Publications, 1956), p. 409.



الشكل 35

نتعامل اليوم مع مسألة إيجاد المتوسط الهندسي بطريقة مختلفة. وذلك لأننا قمنا بتوسيع جميع العمليات المعروفة، مثل الضرب والجذر التربيعي، لتشمل أجوبتها الأعداد الحقيقية، لذا يمكننا أن نؤكد أن طول أي قطعة مستقيمة قابل للتمثيل بعدد حقيقي، وأن $n = \sqrt{(ab)}$ عدد حقيقي موجود.

ما هي هذه الأعداد الحقيقية المتقلِّبة؟ يمكن أن نُعرِّف العدد الحقيقي غير السلبي بالشكل $(n.r_1r_2r_3...)$، حيث n عدد طبيعي وكل رقم r_i بعد الفاصلة العشرية هو أحد الأرقام من 0 إلى 9. وهذه الأعداد «الحقيقية» مثيرة للاهتمام فعلاً وهي في الواقع مثالية للغاية، لأن سلسلة الأرقام الموجودة على يمين الفاصلة العشرية لانهائية. وبالمعنى الدقيق للكلمة، لا يمكننا أبداً كتابة عدد حقيقي بالكامل.

يوجد بالطبع بعض الأعداد الحقيقية، مثل ...25.000 أو ...3.123123123، التي تكرّر نفسها. ومن المناسب أن نكتبها على النحو التالي: $25.\bar{0}$ و $3.\overline{123}$، حيث يدل الخط المستقيم على تكرار الأرقام المكتوبة تحته إلى اللانهاية.

هناك نظرية صغيرة حول تكرار الكسور العشرية. ولتوضيحها، يجب أن نضع في اعتبارنا أن العدد الحقيقي هو عدد منطقي إذا كان مساوياً لكسر، مثل $7/18$.

تقول النظرية: يكون العدد الحقيقي r منطقياً إذا وفقط إذا امتلك تكراراً عشرياً.

بدلاً من تقديم برهان رسمي للنظرية، يكفي أن نطلّع على مثال. لنأخذ عدداً حقيقياً r مساوياً لـ $2/7$. بعد أن نبدأ بقسمة 2 على 7، سنصل إلى أرقام تكرّر نفسها مرة بعد مرة.

$$
\begin{array}{l}
\qquad .28571428\ldots = .\overline{285714} \\
7\overline{)\,2.00000000\ldots} \\
\quad \underline{1\;4} \\
\quad\;\; 6\;0 \\
\quad\;\; \underline{5\;6} \\
\quad\;\;\; 4\;0 \\
\quad\;\;\; \underline{3\;5} \\
\quad\;\;\;\; 5\;0 \\
\quad\;\;\;\; \underline{4\;9} \\
\quad\;\;\;\;\; 1\;0 \\
\quad\;\;\;\;\;\; \underline{\;\;7} \\
\quad\;\;\;\;\;\; 3\;0 \\
\quad\;\;\;\;\;\; \underline{2\;8} \\
\quad\;\;\;\;\;\;\; 2\;0 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\; \underline{1\;4} \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\; 6\;0 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\; \underline{5\;6} \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 4\ldots
\end{array}
$$

سنجد أيضاً، بأخذنا عدداً حقيقياً r يمتلك تكراراً عشرياً 123 بعد الفاصلة مثلاً، أن الأرقام «123» ستكرر نفسها بلانهاية على يمين الفاصلة العشرية. وإذا ضاعفنا العدد r بضربه بـ 1000، سيبقى التكرار قائماً إلى ما لانهاية. لكن إذا طرحنا r من $1000\ r$، فلن يتبقى شيء على يمين الفاصلة العشرية.

$$
\begin{array}{rrl}
 & 1000\ r = & 123.123123123\ldots \\
- & r = & .123123123\ldots \\
\hline
 & 999\ r = & 123 \\
 & r = & 123/999 \\
 & r = & 41/333
\end{array}
$$

من المقنع اكتشاف أن الطريقتين «النهائيتين» لتوصيف عدد حقيقي

-سواء بكسر أو بتكرار عشري- تتطابقان. وبالنظر إلى إثباتنا أن العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي، أي غير منطقي، يمكننا التأكيد أن الامتداد العشري له لا يتكرر أبداً. لأننا عندما نكتب $\sqrt{2}$=1.4159...، فما من أي طريقة لتوصيف النمط «...» الذي يشتمل عليه.

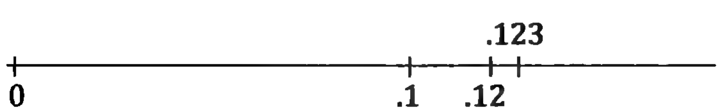
يمكننا أيضاً تطبيق النظرية بالاتجاه المعاكس. أي إن بإمكاننا اصطناع عدد عشري غير دوري والتأكد من أنه يمثّل عدداً حقيقياً غير نسبي. على سبيل المثال، هناك عدد ليوفيل المُصطنع (0.010010001000010000010000001...)، الذي يتمثّل مبدأ بنائه على زيادة عدد الأصفار باطراد مما يضمن عدم تكرار الرقم نفسه. كما يمكن الحصول على نوع مختلف من الأعداد العشرية غير الدورية عن طريق تجميع الأعداد الطبيعية معاً للحصول على «عدد الأعداد»، وهو (0.12345678910111213141516171819202122 23...).

لكن كيف نتأكد أن مثل هذه الامتدادات العشرية الاصطناعية هي أعداد فعلاً؟ ما المقصود بالضبط بـ 12345...؟ نحن متفقون أنه يعني السلسلة أو المجموع اللامتناهي:

$$^{1}/10 + {}^{2}/100 + {}^{3}/1000 + {}^{4}/10000 + {}^{5}/100000 + \ldots$$

ومن السهل تصور التفسير الهندسي لذلك.

يُعتبر أي عدد حقيقي معين، مثل (0.12345...)، نقطة حقيقية على مستقيم الأعداد الحقيقية المثالي. لكن المشكلة في هذا النهج أنه لا يمكن شرح من أين يأتي «مستقيم الأعداد الحقيقية» هذا، فهو شيء يمكن العثور عليه على نحو أكيد في مشهد العقل فحسب، ولا يمكن الافتراض بأن فضاءنا الفيزيائي مليء بنسخ من مستقيم الأعداد الحقيقية.



الشكل 36

لم يجرِ التعامل مع هذه المشكلة إلا قبل حوالي مئة عام فقط، من قِبَل أصدقائنا: كانتور وديديكايند. عرَّف كانتور العدد الحقيقي ببساطة على أنه متتالية لانهائية من الأرقام، تماماً كما ذكرنا أعلاه. وكان العنصر الأصلي في مقاربته هو أن المرء لا يتصرف كما لو أن مجموع المتتالية اللانهائية التي يعبِّر عنها عدد حقيقي ما هو شيء آخر غير المتتالية نفسها أو خارجها. وبالتالي، فإن مجموع «عدد الأعداد» السابق الذكر ليس سوى المتتالية نفسها. وباستخدام تعريفات غريبة مختلفة، يمكن للمرء أن يتعلم إضافة ومضاعفة هذه المتتالية مع بعضها البعض دون التظاهر بأنه يتعامل مع حدود منتهية. والنقطة هنا هي أن كانتور تخلى عن التظاهر بأن الأعداد الحقيقية هي أطوال منتهية محددة في المقام الأول، بل تعامل معها كمتتالية عشوائية لانهائية من النموذج $\pm n.r_1r_2r_3...$

الشكل 37

عرَّف ديديكايند الأعداد الحقيقية أيضاً من حيث المجموعات اللانهائية. كانت مقاربته هي وصف عدد حقيقي على أنه قطعة $[L,R]$ من الأعداد المنطقية. والفكرة هي أن كل عدد منطقي هو إما في L أو في R، وكل عنصر في L أقل من كل عنصر في R. وهكذا، يتمّ تمثيل الجذر التربيعي لـ 2 بالقطعة:

$$[\{a/b: a^2/b^2 < 2\}, \{a/b: a^2/b^2 > 2\}]$$

الأمر الحاسم في تعريف ديديكايند للعدد الحقيقي هو أن العدد الحقيقي نفسه هو مجموعة لانهائية. ولكي نكون أكثر دقة، فإن العدد الحقيقي عند ديديكايند هو زوج $[L,R]$ من مجموعات لانهائية.

من الغريب في تاريخ الرياضيات أن تعريف ديديكايند للأعداد الحقيقية موجود تقريباً في نظرية التناسب الواردة في كتاب إقليدس الخامس. وكانت المشكلة التي تحاول النظرية حلها هي كيف يمكننا مقارنة النسب والتعامل معها (مثل النسبة $d : s$ المذكورة أعلاه) والتي لا تساوي نسبة بين أي عددين طبيعيين. كان الحل يتمثَّل باعتبار النسبة غير المنطقية $X : Y$ كقطع من الشكل

$$[\{m{:}n \mid mY < nX\}, \{m{:}n \mid mY > nX\}]$$

ونجد ذلك منطقياً إذا أدركنا أن $m/n < X/Y$ إذا $mY < nX$ أو $mY > nX$.

الفرق بين هذه النظرية وفكرة ديديكايند هو أن الأولى تعتبر النسبة بين مقدارين كأنها شيء، مع الوصف أن المجموعات اللانهائية تنشأ بطريقة عملية فحسب وتكون لانهائية محتمَلة (لأن المرء لن يحتاج إلى كل عناصر القطعة اللانهائية فعلياً أبداً). وما لم يقُم أحد ببناء مقدارين معينين للمقارنة، فإن القطعة المكافئة لا معنى لها لأن ما من شيء لانهائي، وبالتالي فهي غير حقيقية.

من ناحية أخرى، قبِل ديديكايند المجموعات اللانهائية في القطع المستقيمة باعتبارها أساسية. توجد كل المجموعات اللانهائية الفعلية المختلفة في مشهد العقل، وتوجد كل الأعداد الحقيقية هناك أيضاً، سواء أمكن إنشاؤها أو وصفها على نحو نهائي أم لا.

الفكرة هنا أن الطريقة الوحيدة للحصول على تمثيل رياضي ثابت لفكرة «العدد الحقيقي العشوائي» هي تمثيل الأعداد الحقيقية من خلال مجموعات لانهائية. ولا توجد طريقة أخرى للحصول على أساس مطلق لنظام الأعداد الحقيقية من حيث الكائنات الرياضية المنفصلة.

بمجرد إدراكنا إمكانية تمثيل الأعداد الحقيقية بمجموعات لانهائية، ينكسر الحاجز. بعد عشر سنوات من وفاة كانتور، كان من الشائع تمثيل كل كائن رياضي بمجموعة. وسنلاحظ دائماً أن كل كتاب رياضي في أي مجال، سواء كان تحليلاً أم جبراً أم طبولوجياً[3]، يبدأ بفصل أو قسم صغير حول نظرية المجموعة، وذلك لأن كل ما يمكن أن يذكره الكتاب يمكن تمثيله كمجموعة.

بالنسبة للفيثاغوريين، كان كل شيء عدداً طبيعياً. ولم يعد من الممكن الدفاع عن معتقدهم بعد أن أدركنا أن بعض الأشياء في جوهرها لانهائية. بينما تؤكد العقيدة الحديثة التي تُسمَّى الكانتورية أن كل شيء (على الأقل كل شيء رياضي) هو مجموعة.

3- الطبولوجيا هي دراسة المجموعات المتغيرة التي لا تتغير طبيعة محتوياتها، وتُسمَّى أحياناً «الهندسة المطاطية». للمزيد انظر: *What is Topology? A short and idiosyncratic answer*, by Robert Bruner. (المترجمة).

مثلما فرض وجود اللانهاية الفعلية إعادة النظر في موقف فيثاغورس، فرض وجود اللانهاية المطلقة إعادة النظر في موقف كانتور. إذا وُجد بالفعل مطلقات من النوع الذي ناقشناه سابقاً في فقرة «اللانهاية المطلقة»، فهناك أشياء لا يمكن وضعها ضمن مجموعة. ولم تحسم نظرية المجموعة هذا الموضوع بعد. لكن دعونا أولاً نناقش الأعداد فوق المنتهية.

عندما ندرك أن الأعداد غير النسبية هي في الأساس لانهائية، لأنها لا يمكن أن تستند بالكامل إلا على نظرية المجموعات اللانهائية، فمن الطبيعي أن نبدأ النظر إلى أعداد لانهائية في الكِبَر، أو أعداد فوق المنتهية. وبكلمات كانتور، «يمكن للمرء أن يقول بدون شروط إن الأعداد فوق المنتهية توجد مع الأعداد غير النسبية اللانهائية؛ وهي ذاتها في جوهرها، وبالتأكيد أثَّرت وغيَّرت في اللانهاية الفعلية»[4].

في ملاحظة أخيرة عن الكانتورية، نذكر أن توحيد الكيمياء وتبسيطها تمّ بعد إدراك أن كل مركب كيميائي مصنوع من الذرات، وهذا يماثل إلى حدٍّ كبير توحيد الرياضيات بعد إدراك أن كل الكائنات الرياضية من النوع ذاته من الأشياء. توجد الآن طرق أخرى غير نظرية المجموعة لتوحيد الرياضيات، ولكن لم يكن هناك قبلها أي مفهوم محدّد للرياضيات؛ فعلماء الرياضيات في عصر النهضة ترددوا في جمع مقدار مرفوع للقوة 2 مع مقدار مرفوع للقوة 3، فالأول مستوٍ والثاني حجم. ومنذ ظهور نظرية المجموعة يمكننا القول إن جميع علماء الرياضيات يبحثون في فضاء العقل ذاته.

4- Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 395-396.

الأعداد فوق المنتهية

في روايتي «White Light»، وصفتُ جبلاً أعلى من اللانهاية، وسمَّيته «فوق»[5]. يتكوّن هذا الجبل من منحدرات ومروج متناوبة، وميزته أنه حتى بعد تسلُّق المرء عشرة منحدرات، وألف منحدر، وعدداً لانهائياً منها... سيجد أمامه مزيداً من المنحدرات. لكن يمكن للمتسلِّقين إحراز بعض التقدم بقيامهم بإجراء يُدعى «التسريع»، الذي يمكّنهم من تجاوز اللانهاية الأولى مثلاً في ساعتين.

كيف لهذا أن يحدث؟ الفكرة تكمن في مفارقة زينون، الذي قال إن أي مسافة بين نقطتين محددتين تتكوّن من عدد لانهائي من الأجزاء، فيتمّ تسلُّق المنحدر الأول في ساعة، والمنحدر الثاني في نصف ساعة، والذي يليه في ربع ساعة، وهكذا، أي عدد n من المنحدرات في $\frac{1}{2^n}$ ساعة. ولأن مجموع ...+⅛+¼+½+1 يساوي 2، نجد أنه بعد مضي ساعتين سيجتاز المتسلِّق عدداً لانهائياً من المنحدرات. لكنه سيجد بالتأكيد المزيد من اللانهايات أمامه.

في هذا القسم، سنتسلَّق الأعداد فوق المنتهية، التي تُعرف عادة بالأعداد الترتيبية «Ordinal numbers». يوصف العدد الترتيبي a عادة بإعطاء مثال عن مجموعة M التي إذا عُدَّت عناصرها بالترتيب نصل إلى العدد a. وبالتالي يُنظر إلى العدد a على أنه الترتيب المجرد لعناصر M، ويُدعى $\bar{M}$. إن

5- Rudy Rucker, *White Light*، أو *What Is Cantor's Continuum Problem?* (New York: Ace Books, 1980). والعنوان الفرعي في الواقع هو عنوان أحد أبحاث كورت غودل.

العدد الترتيبي $\bar{\bar{M}}$ هو عدد عناصر المجموعة M مع تجاهل المظهر الحقيقي لعناصرها الفردية والاستعاضة عنه بالتركيز على ترتيب هذه العناصر.

من الأوميغا إلى إيبسيلون-صفر

يمكن اعتبار أن الأعداد الترتيبية فوق المنتهية تنشأ من خلال عملية العَدِّ. وهناك مبدآن لتوليد الأعداد الترتيبية:

1) إذا كان لدينا العدد الترتيبي a، يمكننا إيجاد العدد الترتيبي التالي له وهو $a+1$.
2) إذا كان لدينا متتالية معينة متزايدة من الأعداد الترتيبية وهي a، يمكننا إيجاد آخر عدد فيها والذي يكون العدد الأكبر، ويُسمَّى «نهاية a».

نحتاج أيضاً إلى عدد ترتيبي أول نبدأ به، وهو الصفر (0). (أي إن المبدأ الثاني لتوليد الأعداد الترتيبية يعطينا الصفر، لأن الصفر هو العدد الترتيبي الأول الذي يعبِّر عن المتتالية الفارغة). وفي كل الأحوال، بمجرد أن يكون لدينا الصفر، يمكننا تطبيق المبدأ الأول للحصول على الأعداد الترتيبية 0، 1، 2، ... ولتجاوز المتتالية اللانهائية من الأعداد الترتيبية المنتهية نستخدم المبدأ الثاني للحصول على «نهاية (n)»، وتُسمَّى عادة أوميغا «ω»، وتُعرف أيضاً بـ«الألِف-صفر»[6].

«أوميغا» هي الحرف الأخير في الأبجدية اليونانية (تقابل الياء في اللغة العربية)، ويبدو أن هذا هو سبب اختيار كانتور لهذا الحرف لاستخدامه على أنه العدد الذي يأتي بعد كل الأعداد المنتهية. وكلمة «أوميغا» مألوفة إلى حدٍّ ما، وتظهر في سفر رؤيا يوحنا اللاهوتي 8:1، «أَنَا هُوَ الأَلِفُ وَالْيَاءُ، الْبِدَايَةُ وَالنِّهَايَةُ».

أصبح لدينا الآن ($0, 1, 2, 3, \ldots \omega$). وباستخدام المبدأ الأول على نحو متكرر نحصل على المتتالية ($0, 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$)، وللوصول إلى أبعد من ذلك، نستخدم المبدأ الثاني لتشكيل النهاية ($\omega+n$)، والذي عادة ما تُسمَّى ($\omega+\omega$) أو ($\omega.2$).

قد نتساءل لِمَ نهاية ($\omega+n$) و($\omega+\omega$) و($\omega.2$) هي ذاتها. والجواب أن

6- «الألِف-صفر» هو أصغر عدد لانهائي، وهو عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية، وأول عدد لانهائي في سلسلة الأعداد الأصلية اللانهائية.

هناك طريقة محددة لتعريف الجمع والضرب للأعداد الترتيبية اللانهائية. وسأشرحها بإيجاز؛ بالنسبة للأعداد الترتيبية المنتهية، فإننا نحصل على العدد الترتيبي $a+b$ بالعَدِّ حتى a ثم العَدِّ بعده بمقدار b. أما العدد الترتيبي $a.b$ فنحصل عليه من تكرار العَدِّ حتى a عدداً من المرات مساوياً لـb، أي من خلال تجميع b نسخةً من a، ومعاملتها على أنها مجموعة مرتبة M، ثم التلخيص للحصول على العدد الترتيبي $\bar{M} = a.b$.

وطالما نتعامل مع الأعداد الترتيبية المنتهية، فإن هاتين العمليتين هي ذاتها عمليتا الجمع والضرب العاديتان، وتحققان ميزة التبادلية. لكن عندما نبدأ العمل مع الأعداد الترتيبية اللانهائية، فلا تتحقق الميزة التبادلية، ونوضِّح ذلك فيما يلي:

$1+\omega$ هي ذاتها ω

$\omega+1$ هي العدد التالي لـω

$$\underbrace{\blacktriangle}_{1} + \underbrace{\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\cdots}_{\omega} = \underbrace{\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\cdots}_{\omega}$$

$$\underbrace{\mathrm{xxxx}\cdots}_{\omega} + \underbrace{\mathrm{x}}_{1} = \underbrace{\mathrm{xxxx}\cdots\mathrm{x}}_{\omega+1}$$

و $2.\omega$ هي تكرار العدد 2 بعدد أوميغا من المرات، مما يجعلها مجموعة مرتبة تساوي العدد الترتيبي ω. بينما $\omega.2$ هي اثنان من الأوميغا توضعان بجانب بعضهما البعض، مما يعطينا العدد الترتيبي $\omega+\omega$.

$$2.\omega = \underbrace{\star\star}_{2} + \underbrace{\star\star}_{2} + \underbrace{\star\star}_{2} + \cdots = \underbrace{\star\star\star\star\cdots}_{\omega}$$

$$\omega.2 = \underbrace{\square\square\square\square\cdots}_{\omega} + \underbrace{\square\square\square\square\cdots}_{\omega} = \underbrace{\square\square\square\square\cdots\square\square\square\square\cdots}_{\omega+\omega}$$

أصبح لدينا الآن، من تكرار المبدأ الأول لتوليد الأعداد الترتيبية:

$(0, 1, 2, 3, \dots \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega.2, \omega.2+1, \omega.2+2)$

ومن الواضح أن نهاية $(\omega.2+n)$ هي العدد الترتيبي $(\omega.2+\omega)$، والذي

يُعرف أيضاً بـ ($\omega.3$). وبالاستمرار في هذا السياق، نصل إلى ($\omega.n$) حيث n عدد منته. وباستخدام المبدأ الثاني لتوليد الأعداد الترتيبية، نشكِّل نهاية ($\omega.n$)، وهي نسخ عددها أوميغا من أوميغا نفسها، وتُكتب ($\omega.\omega$) أو ω^2.

يوضح لنا الشكل 38 كيف نصل من ω إلى ω^2 وإلى ω^3 وأخيراً إلى ω^ω. وسأشرح هنا أربع نقاط، M_1 و M_2 و M_3 و M_ω. وفي كل حالة، يمكن اعتبار مجموعة النقاط على أنها تقع بين الصفر والواحد على مستقيم الأعداد الحقيقية، وكل M_i تمثِّل عدداً ترتيبياً، حتى نصل إلى ω^i. قد يتساءل المرء كيف يمكن احتواء عدد لانهائي مثل ω^2 في المسافة بين الصفر والواحد على مستقيم الأعداد الحقيقية، فهذه المسافة تبدو منتهية! لكن الحيلة هنا تستند إلى مفارقة زينون التي تقول إن أي مسافة بين نقطتين محددتين قابلة للقسمة إلى عدد لانهائي من الأجزاء، وهكذا: إذا بدأنا باجتياز المسافة بين الصفر والواحد، علينا أولاً أن نقطع نصف هذه المسافة، ثم نصف المسافة المتبقية، ثم نصف نصف المسافة المتبقية... وهكذا سنحتاج عدداً لانهائياً -مثل أوميغا- من الخطوات للوصول إلى الواحد. وهذا ما تظهره الصورة الأولى.

الشكل 38

أمَّا الصورة الثانية فتعبِّر عن الحالة التي نضع فيها نسخة من الصورة الأولى في كل مسافة بين النقاط من الواحد إلى الصفر. وفي الصورة الثالثة تظهر الحالة التي نضع فيها نسخة من الصورة الثانية في كل مسافة بين النقاط من الواحد إلى الصفر. هذا ما يمكننا قوله إذا اعتقدنا أن ω^3 هي عبارة عن $(\omega^2.\omega)$. ومن ناحية أخرى، إذا فكرنا أن ω^3 هي $(\omega.\omega^2)$ فعندها تعبِّر الصورة الثالثة عن الحالة التي توضع فيها نسخة من الصورة الأولى في كل مسافة بين النقاط في الصورة الثانية (أي ω^2 نسخة من ω، بدلاً من العكس: ω نسخة من ω^2.) ونصل إلى النتيجة نفسها، لأنه بالرغم من أن عملية ضرب الأعداد الترتيبية لا تحقق خاصية التبادل، إلا أنها تحقق الخاصية التجميعية (أي $(a.b).c = a(b.c)$). ونصل إلى الصورة الرابعة من خلال مواصلة العملية التي بدأت في الصور الثلاث الأولى إلى ما لانهاية، ثم وضع نسخة من كل صورة في المسافة بين النقاط.

كتبتُ بجانب كل صورة إحداثيات العدد الحقيقي للنقاط التي نناقشها إذا اعتبرنا أن المسافة الفاصلة هي واحدة البعد على مستقيم الأعداد الحقيقية. لا تهمنا هذه التعريفات المحددة على نحو خاص، لكن المهم أن ندرك أن الترتيب «فوق المنتهي» لهذه النقاط يمكن أن يُحتوى في مسافة منتهية. وباستخدام مفارقة زينون، يمكننا نوعاً ما رؤية ترتيب من النوع ω^2 اللانهائي دفعة واحدة! فعلاً، ليست الأعداد الترتيبية فوق المنتهية أمراً مستحيل التصور على الإطلاق. مكتبة سُر مَن قرأ

يمكننا بالفعل أن نلائم أي عدد ترتيبي معدود في صورة من هذا النوع. (في القسم الفرعي التالي سنلقي نظرة على الأعداد الترتيبية غير القابلة للعد.) ولكن توضيح ω^3 أمرٌ مليء بالفوضى، وستفتقر صورة ω^ω بدون استخدام رموز الأسهم إلى التفاصيل وستبدو غير مفهومة تماماً. سنتعرف على تقنية مختلفة لتصوير المخططات قريباً. لكن أولاً سأصف المدى الذي سنصل إليه في هذا القسم. إن إحدى طرق توصيف ω^2 هي أنها عدد ترتيبي a أكبر من أوميغا لدرجة أن إضافة أوميغا إليه لا يغيِّر من قيمته، أي $\omega+a=a$. يتضح ذلك من خلال التفكير بـ ω^2 على أنها $\omega+\omega+\omega+\omega...$. ومن الواضح أن وضع «$\omega+$» أمام هذا الرمز لا يغيِّر شيئاً. في الواقع، ω^2 هو *أول* عدد ترتيبي من النمط $\omega+a=a$.

ماذا عن العدد الترتيبي a الذي هو $\omega.a=a$؟ إذا اعتبرنا أن ω^{ω} تساوي $\omega.\omega.\omega.\omega...$، نجد أن وضع ω أمام ω^{ω} لن يغير شيئاً. أو يمكننا تطبيق القوانين المألوفة للأُس (والتي تنطبق على الأعداد الترتيبية)، حيث:

$$\omega.\omega^{\omega} = \omega^{1}.\omega^{\omega} = \omega^{1+\omega} = \omega^{\omega}$$

لأن $1+\omega=\omega$.

وأيضاً كما في السابق، يمكن إثبات أن ω^{ω} هي *أول* عدد ترتيبي من النمط $\omega.a=a$.

أمَّا العدد الترتيبي الأول a الذي هو $\omega^{a}=a$، فيُسمَّى «إبسيلون–صفر» ورمزه ϵ_0. وبمعالجة الرموز يبدو شكل ϵ_0 كما يلي:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}}$$

ومن الواضح أن رفع أوميغا ω إلى الأُس إبسيلون لا يغير شيئاً، لأن الأُس $\omega+1$ يساوي الأُس ω. لكن بإمكاننا وصف إبسيلون–صفر على نحو أفضل، وهي أن نفرض b هي التكرار الأُسِّي الرباعي لـa. وعملية التكرار الأُسِّي الرباعي هي عملية منطقية تحتل المرتبة الرابعة بين العمليات المنطقية: الجمع والضرب والرفع إلى أُس ثم تكرار الأُس. ولا تُعتبر هذه العملية مألوفة بسبب قوتها، فالتكرار الأُسِّي لأعداد صغيرة يعطي أعداداً كبيرة جداً، فمثلاً:

$$2^4 = 2^{(2_{(22)})}$$

$$= 2^{(2_4)}$$

$$= 2^{16}$$

$$= 64,536$$

ونلاحظ أن علينا إجراء العملية من الأعلى إلى الأسفل، بدلاً من الأسفل إلى الأعلى، للحصول على أكبر عدد ممكن.

ولندرك مقدار كِبَر الأعداد التي تنتج عن عملية التكرار الأُسِّي الرباعي،

نكرر المثال السابق مع العدد 3، حيث $^{3}3 = 3^{(3^{3})} = 3^{27}$، وهي تساوي تقريباً 8 تريليون. أمَّا $^{3}10$ فتساوي 10 مرفوعة للقوة مليار، أي واحد وعلى يمينه عشرة مليارات صفر. ونأتي إلى التكرار الأُسِّي للأوميغا ω^{2}، ويساوي ω^{ω}. ولكن ω^{3} مقدار صعب الوصول فعلاً، فهو يساوي أوميغا مرفوعة للأُس أوميغا المرفوعة للأُس أوميغا. ولتخيُّل ذلك يمكننا العودة إلى الصورة التي تمثِّل ω^{ω} وتصوُّر استبدال كل نقطة من مستقيم الأعداد بالعدد أوميغا.

ما نريد الوصول إليه من كل ذلك أن ندرك أن ϵ_0 هو التكرار الأُسِّي -بمقدار أوميغا- لأوميغا نفسها. ولا تتوقف الأعداد الترتيبية القابلة للعَدِّ منا، فعلى سبيل المثال، يمكننا استيعاب عدد أكبر من الرمز التالي:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}$$

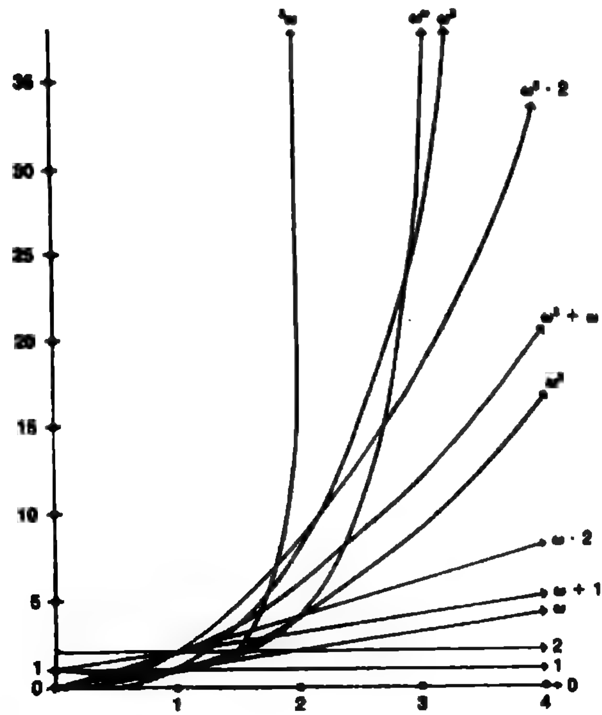
عندما نفكر بأعداد ترتيبية أكبر وأكبر، سنغرق في مستنقعات من الإرباك لانهاية لها. وأي محاولات لتسمية أعداد أكبر، تتلاشى في نهاية المطاف، بينما تستمر الأعداد بالكِبَر. وأخيراً، قد يضيء عقلك وتلمح ومضة عن اللانهاية المطلقة، وحينها تحاول أن تضع أسماء لهذه الومضة، وتصل إلى نظام جديد لتسمية الأعداد... والذي يتلاشى بدوره أيضاً في النهاية...[7].

إن ω^{ω} هي البداية فحسب، ويمكننا أن نتعرَّف على نوع مختلف منها. لنفترض أن PN مجموعة كثيرات الحدود في x مع أمثال من الأعداد

7- ربما كان: Heinz Bachmann, *Transfinite Zahlen* (Heidelberg: Springer-Verlag, 1967)، أفضل مرجع لوصف الطرق المختلفة لتسمية الأعداد الترتيبية القابلة للعدّ. كما أن Georg Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (New York: Dover, 1955)، مرجع قيِّم أيضاً، ويضمّ ترجمة لوصف كانتور الأكثر وضوحاً للأعداد الترتيبية فوق المنتهية، والذي نُشر عام 1897.

الطبيعية. ولنأخذ أمثلة عن عناصر هذه المجموعة، x، $x+3$، $5x^2$، $4+2x$، $163+6x^3+3x^8$. فإذا كان لدينا كثيراً الحدود $P(x)$ و$q(x)$ من هذه المجموعة، تكون العلاقة الترتيبية $q(x)_{\text{bep}}>P(x)$ صحيحة إذا وفقط إذا تمكن الخط البياني لكثير الحدود الثاني من أن يعلو –ويستمر على هذا النحو– فوق الخط البياني لكثير الحدود الأول. (ترمز bep إلى المقارنة بين المقدارين وفق نهاية كل منهما).

السبب في ذكرنا لِما سبق أن نعرف أنه عند أصغر ترتيب لكثير الحدود PN، يكون العدد الترتيبي هو ω^ω؛ فكثير الحدود $P(x)$ يمثِّل العدد فوق المنتهي $P(\omega)$، بشرط أن الأمثال يجب أن تنتقل إلى اليمين كما يلي: $(2x+3x^2)$ تصبح $(\omega^2.3+\omega.2)$.



الشكل 39

في الشكل 39، صوَّرتُ أن:

$$0 <_{\text{bep}} 1 <_{\text{bep}} 2 <_{\text{bep}} x+1 <_{\text{bep}} 2x <_{\text{bep}} x^2 <_{\text{bep}} x^2+x <_{\text{bep}} 2x^2 <_{\text{bep}} x^3 <_{\text{bep}} x^x <_{\text{bep}} {}^3x$$

حيث x^3 تعني رفع x للقوة x المرفوعة للقوة.

يُعرَّف $<_{\text{bep}}$ بالمعنى الدقيق لكثيرات الحدود فحسب، لكن من الواضح أن بإمكاننا توسيع استخدامه ليشمل العبارات أو التوابع العشوائية لـ x. وإذا قمنا بالتكرار الأسِّي كعملية قياسية واعتبرنا *PPN* مجموعة كل شبه كثيرات الحدود التي تتشكل باستخدام أمثال الأعداد الطبيعية والتكرار الأسِّي والرفع إلى قوة، فمن السهل أن نرى أن *PPN* هي ϵ_0. وكمثال على شبه كثير الحدود من المجموعة *PPN* نذكر

$$({}^5x) + 2(x^3)^4 + 7(x^3) + ({}^2x)^8 + 13(x^2)^2 + 11(x^2) + 3x^7 + 9x^3 + 2x + 78$$

ونلاحظ أن التكرار الأسِّي x لـ x نفسها هو ϵ_0.

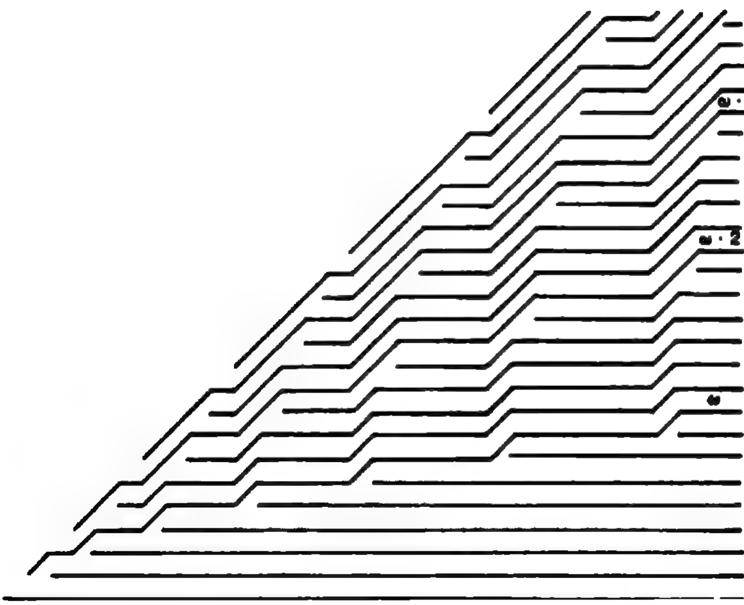
كان «إيميل دوبويس ريموند» أول من قام بدراسة ترتيب «البداية في كل نهاية»، وعرض أفكاره على نحو مثير للاهتمام «غودفري هارولد هاردي» في كتابه «ترتيبات اللانهاية»[8]. وقدَّم فيليكس هاوسدورف تحسيناً لتقنية ريموند في سلسلة أبحاثه البارزة «*Untersuchen über Ordnungstypen*» التي نشرها في بدايات القرن العشرين. أُخِذ المصطلح «ترتيب النهايات» من «كورت غودل»، الذي أحيت دراساتُه الاهتمام بهذا الترتيب في ستينيات القرن الماضي[9].

يمكننا التركيز على التوابع التي منطلقها ومستقرها مجموعة الأعداد الطبيعية. ومن الممتع تمثيل الأعداد الترتيبية كحزم من هذه التوابع،

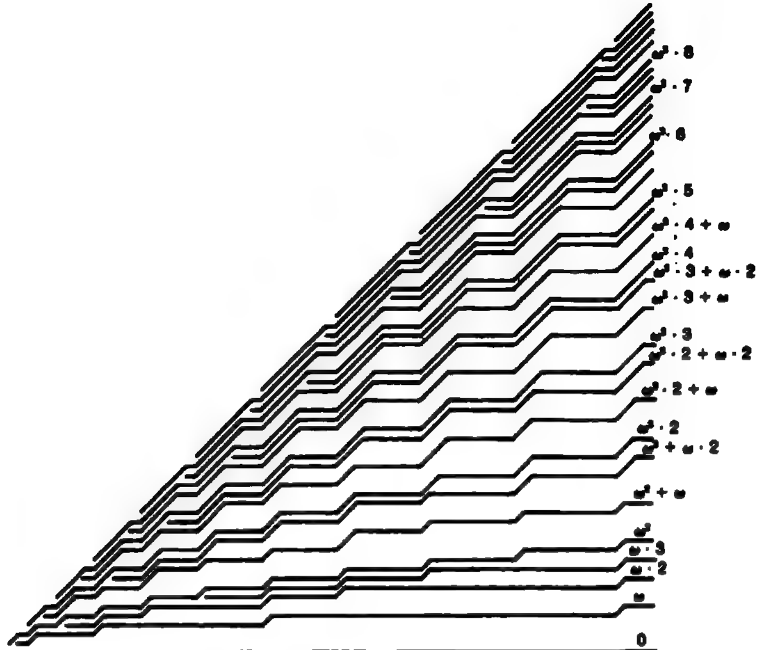
8- G. H. Hardy, *Orders of Infinity, the 'Infinitärcalcul' of Paul DuBois-Reymond*, (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1910).

9- انظر: Erik Ellentuck, «Gödel's Square Axioms for the Continuum», *Mathematische Annalen* 216 (1975), pp. 29-33.

تملأ الخطوط بين نقاط الرسم البياني بالطريقة الطبيعية. ولزيادة جمالية الصورة، نترك أجزاءً من الخطوط لتجنُّب التقاطع. أُسمِّي مثل هذه الصور «زيقورات»، لأنها تشبه الأبراج البابلية أو أهرامات الهنود الحمر، ويظهر الشكل 40 زيقورة بارتفاع ω^ω، والشكل 41 زيقورة بارتفاع ω^3، والتي لم أرسم فيها كل الخطوط تجنُّباً للإرباك. في كل حالة، سينضم الخط المفقود إلى الخط تحته مباشرة بأقرب ما يمكن.



الشكل 40



الشكل 41

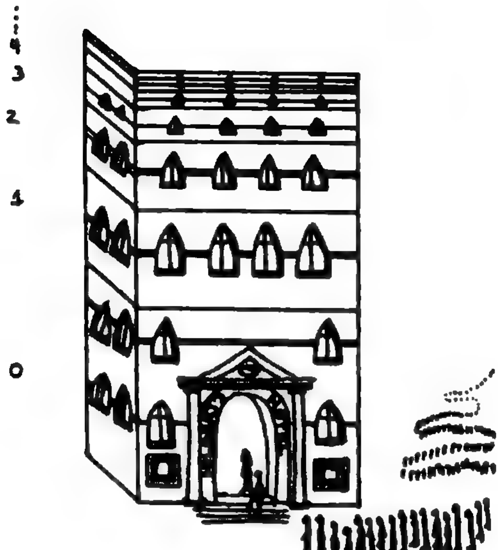
الألِف

اعتاد عالم الرياضيات المشهور «ديفيد هيلبرت» أن يشرح في محاضراته قصصاً عن فندق يضمّ عدداً لانهائياً من الغرف[10]. يُدعى هذا الفندق الأسطوري عادة بـ«فندق هيلبرت»، ويُفترَض أن فيه أوميغا من الغرف: الغرفة0، الغرفة1، الغرفة2، ...، الغرفة *n*، وهكذا. وكما ذكرنا في القسم السابق، من المناسب أن نبدأ العَدَّ بالصفر.

لمناقشة الأفكار، رسمتُ صورة لفندق هيلبرت في الشكل 42. ولكي

10- كتب ستانيسلو ليم، مؤلف روايات الخيال العلمي البولندي الشهير، قصة قصيرة حول فندق هيلبرت. ونُشرت في: N. Ya. Vilenkin, *Stories About Sets* (New York: Academic Press, 1968).

يتسع الفندق ذو العدد اللانهائي من الطوابق في صفحة الكتاب، تخيلتُ أن في كل طابق جهازاً خيالياً يقلِّص الطابق إلى ثلثي ارتفاع الطابق الذي قبله. وسأترك للقارئ أمر التحقق من أنه «إذا كان الطابق الأول بارتفاع عشرة أقدام، ويبلغ ارتفاع كل طابق ثلثي ارتفاع الطابق الذي قبله، فإن الارتفاع الإجمالي لـ ω من الطوابق هو ثلاثون قدماً».

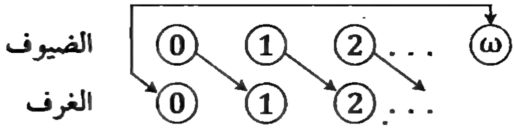


الأعداد الفردية للضيوف	$\underbrace{0,1,2,\ldots}_{\omega}$	$\underbrace{\omega}_{+1}$
العدد الكلي للضيوف		

الشكل 42

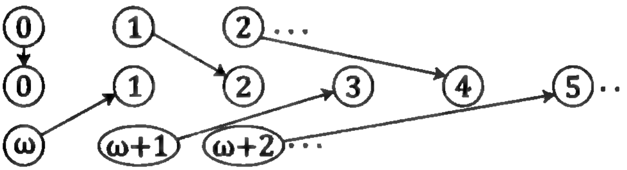
إحدى المفارقات في فندق هيلبرت هي الإمكانية الدائمة لإضافة المزيد من النزلاء وبمعدل نزيل واحد في كل غرفة. على سبيل المثال، لنقُل أن هناك ω ضيفاً، في كل غرفة n ينزل ضيف n، وجاء ضيف جديد، أين سينزل؟

الأمر سهل! نضع الضيف رقم ω في الغرفة رقم 0، بعد أن نزيح الضيف رقم 0 إلى الغرفة رقم 1، بعد أن نزيح الضيف رقم 1 إلى الغرفة رقم 2، ... وهكذا.



$\omega + 1$ من الضيوف في ω الغرف

لكن ماذا لو وصل عدد *لانهائي* إضافي إلى الفندق؟ يمكن حلّ ذلك أيضاً؛ نضع العدد اللانهائي الأول من الضيوف في الغرف ذات الأرقام الزوجية، ونضع العدد اللانهائي الثاني في الغرف ذات الأرقام الفردية.



ω من الضيوف في الغرف الزوجية
الغرف
ω من الضيوف في الغرف الفردية

في الواقع، يمكننا بترتيب مناسب أن نضع ω^2 أو ω^ω أو حتى ϵ_0 من الضيوف في فندق هيلبرت. لكننا في النهاية سنصل إلى حدٍّ للقدرة الأسطورية لهذا الفندق على الاستيعاب، يُسمَّى هذا الحَدُّ «الأَلِف-واحد» $\aleph_1$. الألِف-واحد هو عدد صعب الوصف. إحدى طرق وصفه أنه العدد الترتيبي الأول لعدد الضيوف الذي لا يمكن أن يستوعبه عدد ω من الغرف. الأَلِف-واحد هي رتبة من اللانهاية *أكبر* من ω بطريقة تختلف عن $\omega+\omega$.

ولإدراك مفهوم الأَلِف على نحو أفضل، لنرجع إلى مثال تسلُّق الجبل اللانهائي. وسنفرض أن متسلِّق جبل «فوق» يمكنه السير بأي سرعة محدودة يرغب بها. وكما ذكرنا في بداية قسم «الأعداد فوق المنتهية»، يمكننا اجتياز منحدرات لانهائية تصل حتى ω في ساعتين. وبتكرار ذلك يمكن اجتياز

$\omega+\omega$ في أربع ساعات. إن من الممكن اجتياز ω^2 من المنحدرات في ساعة واحدة. والفكرة تكمن بتخصيص فترة محددة من الوقت لكل منحدر.

لكن لا يمكن لأي متسلِّق أن يصل إلى المنحدر الأَلِف-واحد؛ فما من طريقة يمكن فيها الوصول إلى سرعة محددة كافية للوصول إلى الأَلِف-واحد ضمن وقت منتهٍ. إن الطريقة الوحيدة للوصول إلى الأَلِف-واحد هي التحرك بسرعة أَلِف-واحد ميلٍ في الساعة.

نذكر صورة أخرى للأَلِف-واحد. لنعُد إلى الشكل 39، الذي يوضّح تمثيل أعداد ترتيبية متنوعة كتوابع مرتبة وفقاً لدرجة الانحدار. إلى أين يمكن أن يصل الخط الأكثر انحداراً من كل الخطوط السابقة؟ على الأقل إلى الأَلِف-واحد. وهذا يعني: إذا كانت S مجموعة توابع لكل g، بغض النظر عن درجة الانحدار، سنجد التابع f في S أكثر انحداراً من الخطوط الأخرى، لذا يجب أن تحوي S عدداً من العناصر يصل إلى الأَلِف-واحد.

لنعطي الآن تعريفاً محدداً للأَلِف-واحد. يتوقف هذا التعريف على مفهوم «عدد عناصر المجموعة» أو ما يُعرف بالعدد الأصلي أو «أصلية» مجموعة. إذا كان لدينا عددان ترتيبيان A وB، فنقول إن لـA عدد العناصر نفسه لـB إذا أمكن رسم خريطة تصل كل عنصر من A بعنصر من B.

تعلمنا من فكرة فندق هيلبرت أن لـ$\omega+\omega$ العدد نفسه من العناصر لـω، إذاً هناك طريقة لوصل كل عنصر بعنصر آخر بين $\{0,1,2,...\}$ $\{\omega,\omega+1,\omega+2,...\}$ و$\{0,1,2,...\}$. أمّا الأَلِف-واحد، فتمثِّل العدد الترتيبي الأول الذي يملك عدداً من العناصر أكبر ω ، أي لا يمكن وصل كل عنصر من عناصره بعنصر من ω.

نقول عموماً عن عدد ترتيبي A إنه *عدد أصلي*، إذا وفقط إذا لم يتطابق عدد عناصر A مع أي عدد عناصر عدد أصلي آخر B أصغر من A. على سبيل المثال، لا يمكن وصل عناصر العدد 3 مع عناصر العدد 2. (أذكِّركم هنا أن العدد يُعرَّف عادة بالمجموعة $\{0,1,...,N-1\}$ حيث عدد عناصر العدد أصغر من العدد نفسه.)

إن أوميغا ω عدد أصلي. ولا يمكن وصل عناصر أي عدد لانهائي مع

عناصر عدد منتهٍ يسبقه؛ فلا يمكن لأي فندق بعدد منتهٍ من الغرف، مهما كان كبيراً، أن يتسع لعدد لانهائي من الضيوف.

تُدعى الأعداد الأصلية اللانهائية *أَلِف*. وتعني $\aleph_a$ الترتيب رقم a لعدد لانهائي من عناصر مجموعة ما. أمَّا الأَلِف الصفري $\aleph_0$ فهو أوميغا ω، أي الترتيب الأول (0^{th}) لعدد عناصر لانهائي. وكما يمكننا إيجاد المزيد والمزيد من الأعداد الترتيبية، يمكننا أيضاً إيجاد المزيد والمزيد من الأعداد الأصلية؛ فبعد $\aleph_0$ يأتي $\aleph_1$، $\aleph_2$، $\aleph_3$، ...، $\aleph_\omega$، $\aleph_{\omega+1}$، ...، $\aleph_{\omega^\omega}$، ...، $\aleph_{\aleph_1}$، ، ... $\aleph_{\aleph_\omega}$، ... وهكذا، حتى نصل إلى العدد ثيتا θ حيث $\theta=\aleph_\theta$. ويوضح الشكل التالي ذلك.

$$\theta=\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\cdots}}}}$$

ترى هل هذه هي النهاية؟ لا، في اكتشافنا للأعداد فوق المنتهية لا نصل إلى نهاية أبداً. فبعد ثيتا θ يأتي $\aleph_{\theta+1}$، $\aleph_{\theta+\omega}$، $\aleph_\theta+\aleph_\omega$، وهكذا في عالَم بلانهاية.

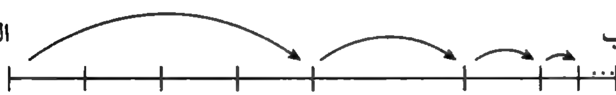
وفقاً لمبدأ الانعكاس المذكور سابقاً (يجب للمطلق أن يكون غير قابل للتصور على الإطلاق)، يستحيل تصوُّر نهاية للأعداد الترتيبية.

لدينا أيضاً الرمز «Ω»، أوميغا الكبيرة، التي تُمثِّل اللانهاية المطلقة التي تقع ما بعد كل الأعداد الترتيبية. لكن أوميغا الكبيرة غير قابلة للتصور. يجعل مبدأ الانعكاس ذلك دقيقاً بالقول إن أي وصف يمكن أن نصله لأوميغا الكبيرة سيكون دائماً قاصراً على عناصر منها دون أن يحيط بها.

تُعرف أوميغا الكبيرة باللانهاية المطلقة لأنها ليست مفهوماً نسبياً. ومستقيم الأعداد الترتيبية الذي يتجه نحوها يحتوي «*كل*» الأعداد الترتيبية، وكل المراحل الممكنة للعَدِّ. وذلك لأن أي عدد ترتيبي يقع قبل أوميغا الكبيرة ليس عدداً ترتيبياً محدداً فعلاً. إنه كلام مربك تماماً! وفي حال أراد أحدكم معرفة المزيد عن أوميغا الكبيرة والأعداد فوق المنتهية يمكنه الاطلاع على التدريب الأول.

اللانهائي في الصُغَر
والأعداد السوريالية

يكمن مفهوم إحدى أشهر مفارقات زينون في فكرة اللانهاية في الصِّغَر، وهي المفارقة التي تقول إن أراد أحدنا مغادرة غرفة ومشى نحو الباب، فلن يتمكن أبداً من مغادرة الغرفة. يفترض زينون أنه بعد تجاوز نصف المسافة سيبقى النصف الآخر؛ وبعد تجاوز نصف النصف المتبقي سيبقى نصف آخر، وبعد تجاوزه سيبقى نصف... وهكذا. بعد كل خطوة يخطوها المرء سيكون هناك جزء من المسافة لم يقطعها بعد.



الشكل 43

ما هو التناقض هنا بالضبط؟ إن المشكلة تظهر في أن هناك طريقتين لتحليل المسافة التي تصل إلى الباب. الطريقة الأولى هي المألوفة باعتبار المسافة وحدة لا تتجزأ مساوية لـ 1. والطريقة الثانية هي تقسيم المسافة باعتبارها مجموع المتتالية اللانهائية من (...+ ⅛+ ¼+ ½). يقول الحل الحديث لمفارقة زينون إن مجموع هذه المتتالية يساوي 1[11]. يمكننا أن

11- انظر، على سبيل المثال: Bertrand Russell, *The Principles of Mathematics* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1903). يقدِّم هذا الكتاب وجهات نظر ما بعد الاستمرارية حول اللانهاية واللامتناهي في الصِّغَر.

نتابع في المفارقة لنصل إلى موضوع الزمن أيضاً؛ فالوقت الذي يستغرقه إكمال المتالية اللانهائية يساوي الوقت الذي يستغرقه المرء ليغادر الغرفة.

قد تشعرنا هذه المفارقة بالانزعاج قليلاً؛ فمهما اجتزنا من المسافة نحو الباب، لن نصل إليه أبداً. ربما نقترب منه على نحو ما ولكن لن نصل إلى نهاية للمسافة.

لدينا في الرياضيات مفارقة من النوع نفسه. في نظام الأعداد الحقيقية الترتيبية، نقول عن العدد مع الامتداد العشري (0.999...) إنه مساوٍ للواحد. وفيما يلي برهان عام على ذلك.

$$\begin{array}{r} 10K = 9.999\ldots \\ -\ K = .9999\ldots \\ \hline 9K = 9 \\ K = 1 \end{array}$$

لكن ماذا لو وُجد عدد ما أكبر من أي سلسلة منتهية من الامتداد العشري (0.999...) وأصغر من 1، مثلاً العدد $1-1/\omega$؟ بديهياً، يسير نقاشنا نحو $1/\omega$ و $1/\aleph$، وما إلى ذلك. فكما ننتقل من الأعداد الطبيعية إلى الكسور ثم إلى الأعداد الحقيقية، يمكننا الانتقال من الأعداد الترتيبية إلى عالَم أغنى من الأعداد.

من الغريب أن كانتور نفسه كان معارضاً بشدة لهذه الخطوة. وعندما حاول أحد زملائه الرياضيين استخدام أعداده فوق المنتهية لتطوير نظرية للمقادير اللامتناهية في الصغر، اتهمه كانتور بأنه يحاول «تسميم الرياضيات بجراثيم الكوليرا اللامتناهية في الصغر»[12] حتى إن كانتور بنى برهاناً على

12- Joseph W. Dauben, *Georg Cantor, His Mathematics and philosophy of the Infinite*, (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1979), p. 131.

يحتوي هذا الكتاب على تقرير عميق ومتوازن للتداخل بين التفكير الرياضي واللاهوتي عند كانتور. وأود هنا أن أحذِّر القارئ من الوصف غير الدقيق لحياة كانتور المذكور في: *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster, 1937).

كما يوجد وصف أفضل لسيرة كانتور، وأقرب إلى وصف دوبين، في:

أن هذه الأعداد لا يمكن أن توجد. وكان البرهان دائرياً وفارغاً، كبراهين النهائيين على عدم وجود أعداد لانهائية.

لِمَ عارض كانتور بشراسة وجود اللانهائيات في الصِّغَر؟ كان رأي أبراهام روبنسون في مقاله المهم «ما وراء علم التكامل» أن كانتور كان منشغلاً بالدفاع عن الأعداد فوق المنتهية[13]. ويبدو الأمر غالباً أن كانتور، بوعي منه أم لا، كان ملتزماً بالحكمة السياسية بالتماشي مع علماء الرياضيات الأرثوذكس في مسألة اللامتناهي في الصِّغَر. ويشبه موقف كانتور هذا موقف مرشَّح للكونغرس يؤيِّد استخدام الماريغوانا ويدافع في الوقت ذاته عن فرض عقوبات صارمة لبيع أو استخدام الهيروين. على كل حال، سنرى أن هناك مبررات لوجود اللانهائيات في الصِّغَر تماماً كمبررات وجود الأعداد فوق المنتهية الكانتورية.

إن من المُثبت القول بوجود عدد بين (0.999...) و(1)، تماماً كما هو القول بوجود عدد أكبر من كل الأعداد. وكما تابعنا المسير لنجد المزيد والمزيد من الأعداد الترتيبية المتراكمة فوق بعضها البعض، يمكننا أن نبحث لنجد المزيد من الأعداد اللامتناهية في الصِّغَر المحشورة بين بعضها البعض.

تنبع إحدى السمات المثيرة للاهتمام لنظرية كانتور من حقيقة أن كل أعداده فوق المنتهية تبدو متجهة نحو لانهاية مطلقة متفرِّدة توجد بعد كل الأعداد. وكما ذكرت من قبل، تقدِّم التعريفات الحديثة لنظرية المجموعة رمز أوميغا الكبيرة Ω ليدل على اللانهاية المطلقة، وبتطبيق مبدأ الانعكاس: كل سمة قابلة للتصور من سمات Ω هي سمة مشتركة مع أحد الأعداد الترتيبية الأصغر من Ω، وبما أن Ω أكبر من كل الأعداد المنتهية n، فإن هناك عدداً -لنُسمِّه ω- أكبر أيضاً من كل الأعداد المنتهية n.

H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors* (Braunschweig: Vieweg-Verlag, 1967).

13- Abraham Robinson, «The Metaphysics of the Calculus», reprinted in J. Hintikka, ed., *The Philosophy of Mathematics* (London: Oxford University Press, 1969), pp. 153 & 163. ويظهر شرح أوسع لهذه الأفكار في: *Non-Standard Analysis* (Amsterdam: North-Holland, 1974).

إن مبدأ الانعكاس هو طريقة مختلفة للقول «إن Ω غير قابلة للتصوُّر». ويمكننا القول أيضاً «ما من سمة فريدة بـ Ω قابلة للتصوُّر»، أو «أياً تكن السمة من سمات Ω، فيوجد حتماً عنصر من عناصرها يتمتع بها». لذلك، لا يمكن لـ Ω أن تكون *الكل الأول*، كما لا يمكنها أن تكون *الكل الوحيد*، مهما كان هذا *الكل*.

باختصار، نبرر وجود أعداد كانتور فوق المنتهية من الافتراضين التاليين:

1) توجد لانهاية مطلقة هي Ω.

2) Ω غير قابلة للتصوُّر.

يمكن للقارئ أن يشكك في إمكانية النقاش العقلاني لأمر لا يمكن تصوُّره مثل Ω. وسأجيب بأن Ω هي حقيقة؛ هي كائن ظهر مباشرة من التجربة ما قبل العقلية للإنسان. واستخدام أدوات المنطق الرمزي للبحث في ظاهرة ذات وجود تجريبي لا يُعتبر خطأً تخصصياً، إلا إذا اعتبرنا أن النظر إلى الخلايا الحية الدقيقة من خلال عدسات المجهر غير الحية خطأً تخصصي أيضاً.

نحن نملك مفهوماً بدائياً عن اللانهاية. وأعتقد أن هذا المفهوم مستوحى من الركيزة العميقة للعقل المتوافق مع الفكر الديني. حتى إن نظرية المجموعة قد تُعتبر شكلاً متقناً من الفكر اللاهوتي. ومن خلال تحليل نظرية المجموعة للانهاية المطلقة، نصل إلى معرفة بالعديد من اللانهايات الدنيا: الأعداد فوق المنتهية والأعداد الأصلية.

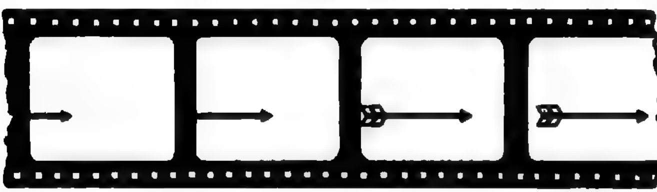
أود الآن أن ألفت نظركم إلى نوع مختلف من المطلقات: *الاستمرارية المطلقة*، كالفضاء المستمر تماماً.

تظهر البديهة الأولى عند التفكير بمستقيم مستمر لانهائي بأنه المستقيم الذي لا يمكن تصوُّره كمجموعة من النقاط. وعبَّر زينون عن هذه البديهة في مفارقة السهم[14]. وتظهِر هذه المفارقة دليلاً على أن الفضاء لا يتكون

14- Gregory Vlastos, *The Encyclopedia of Philosophy* (Paul Edwards, ed., New York: Macmillan, 1967), V.8, pp. 369-378. يمكن اعتبار هذه الموسوعة المرتبة على نحو بديع بداية منطقية لأبحاث أوسع حول أي موضوع أناقشه. كما يمكن الاطلاع على المزيد حول زينون في: Wesley Salmon, ed., *Zeno's Paradoxes* (New York: Irvington, 1970).

من نقاط. تقول مفارقة زينون: عندما نطلق سهماً، يطير السهم من القوس إلى الهدف. إذا كان الفضاء مكوناً من نقاط، عندها يمكننا تحليل طيران السهم إلى مجموعة لانهائية من الحركات المنفصلة، يشغل رأس السهم في كل حركة منها نقطة من الفضاء عبر المسافة من القوس إلى الهدف. لكن المشكلة هي أنه في أي لحظة مُعطاة من سلسلة الحركات المنفصلة، سيكون السهم ثابتاً ومتوقفاً عن الحركة، فكيف يمكن لهذه السلسلة أن تكون سلسلة حركة؟ أين تذهب الحركة إذاً؟

إذا شاهدنا فيلماً عن طيران السهم، سندرك أنه مجموعة من الصور الثابتة للسهم المتحرك، ولن يكون لدينا مشكلة في ذلك، لأننا ندرك أن السهم يتحرك بين الصور. لكن المسألة التي أثارها زينون هي لو أن الفضاء مكون من نقاط، وأن كل «ثبات» يشغل *نقطة*، فعندها ما من إمكانية لـ «الحركة بين النقاط» لأنه ببساطة *ما من شيء يوجد بين النقاط*.



الشكل 44

قدَّم زينون حلاً لهذه المسألة بإنكاره أن الفضاء يتكون من نقاط. وكان متوافقاً مع بارميندس في فكرة أحادية الوجود، وأن الفضاء هو كل واحد لا يمكن تجزئته؛ فقد نجد مواضع متناثرة فيه إلّا أن الفضاء يبقى أكثر من مجموع هذه المواضع المنعزلة عن بعضها البعض. يمكن لأحدنا انتقاء لانهايات متزايدة من الاستمرارية اللانهائية المطلقة للفضاء، لكن سيبقى دائماً بقية منه، فواصل لامتناهية في الصِّغَر حيث يمكن للحركة أن تحدث.

تبنَّى العديد من الفلاسفة وجهة النظر هذه بعد زينون، لعل أبرزهم تشارلز ساندرز بيرس وكورت غودل. ميَّز غودل بين «مجموعة من النقاط» التي يصفها تحليل نظرية المجموعة من جهة، والمستقيم المستمر لانهائياً

في الفضاء من جهة أخرى: «وفقاً لهذا المفهوم الحدسي، لن نحصل على المستقيم حتى لو جمعنا كل النقاط مع بعضها البعض؛ بل سيشكّل هذا المجموع قطعة محمولة على المستقيم»[15].

تجاوز بيرس هذه الفكرة إلى أبعد من ذلك. فقال إن المستقيم المستمر يحتشد بالنقاط لدرجة أنه ما من مجموعة قابلة للتصور، مهما كَبُر حجمها، يمكن أن تجمع نقاطه كلها. ولا يقتصر الفراغ بين (½, ⅔, ¾, ⅘, ⅚,...) و(1) على نقطة واحدة فقط، بل يحتوي عدداً لانهائياً من النقاط، ω من النقاط، $\aleph_1$ من النقاط، لانهاية مطلقة من النقاط![16].

برهن فيليكس هاوسدورف، المُنظِّر المبكر لنظرية المجموعة، الإمكانية المنطقية للترتيب اللانهائي المطلق. ويُشرح برهانه فيما يلي. لنتخيَّل قاموس كلمات هائل الحجم، حيث:

1) تتكون جميع كلمات هذا القاموس من الحرفين A وB؛
2) كل كلمة فيه لانهائية الطول، وتتكون من ترتيب متكرر للحرف نفسه؛
3) يجب أن تنتهي كل كلمة بالشكل ...$BAAA$، وبذلك كل حرف B سيجرُّ خلفه عدداً لانهائياً «مطلقاً» يتكرر فيه الحرف A[17].

وفق هذه القواعد، الكلمة الأولى في القاموس لن تكون ...$AAAA$، ولن تكون ...$BAAA$ أيضاً، بل هي ...$ABAAA$. وإذا قمنا بترتيب كل كلمات القاموس هجائياً سنحصل على ترتيب كثيف لدرجة وجود إمكانية لإضافة كلمات جديدة بين أي كلمتين. وأذكر هنا بعض أطول الكلمات الممكنة، حيث أرمز للتكرار اللانهائي للأحرف بالرمز A^{ω} و B^{ω}:

15- Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy* (New York: Humanities Press, 1974), p. 86. أمضى وانغ عدة سنوات يناقش هذا الكتاب مع غودل، ويقدِّم فيه بعض أكثر أفكار غودل نضجاً. وبدلاً من تبني المواقف العقائدية، يعرض وانغ بدقة الأشكال الموضوعية للقضايا الرئيسية في فلسفة الرياضيات.

16- انظر: Joseph Dauben, «C. S. Peirce's Philosophy of Infinite Sets», *Mathematics Magazine* 50 (May, 1977), pp. 123-135.

17- K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1968), p.336. يحوي هذا الكتاب أيضاً عرضاً مباشراً لأعداد كانتور فوق المنتهية.

$$1/(\omega+\omega) \text{ --- } A^{\omega}A^{\omega}ABAAA...$$

$$1/\omega \text{ --- } A^{\omega}BAAA...$$

$$1/4 \text{ --- } AABAAA...$$

$$1/2 \text{ --- } ABAAA...$$

$$3/4 \text{ --- } ABBAAA...$$

$$1-1/\omega \text{ --- } AA^{\omega}AAA...$$

$$1 \text{ --- } BAAA...$$

$$2 \text{ --- } BBAAA...$$

$$\omega/2 \text{ --- } B^{\omega}A^{\omega}BAAA...$$

$$\omega-1 \text{ --- } B^{\omega}ABAAA...$$

$$\omega \text{ --- } B^{\omega}BAAA...$$

$$\omega+1 \text{ --- } B^{\omega}BBAAA...$$

$$\omega+2 \text{ --- } B^{\omega}B^{\omega}BAAA...$$

عرضتُ هذه الكلمات من قاموس هاوسدروف، جنباً إلى جنب مع الأسماء المألوفة للأعداد والمناسبة لمكان ظهور الكلمات. تعبِّر هذه الأسماء عن الأعداد لكنها غير مبررة بعض الشيء، فلا يوجد لدينا تعريف لكيفية إضافة ومضاعفة هذه الكلمات مثل الأعداد.

في الآونة الأخيرة، اكتشف عالم الرياضيات الإنكليزي جون هورتون كونواي فئة من الأعداد المستمرة على نحو مطلق، والتي تحتوي على عمليات ممكنة من الإضافة والضرب. تُسمَّى أعداد كونواي الجديدة بفئة «الأعداد فوق الواقعية» أو «الأعداد السوريالية»، أو ببساطة No[18].

يشرح كونواي أعداده على أنها «تولد» في متتالية لانهائية من الأيام، يوم

18- J. H. Conway, *On Numbers and Games* (New York: Academic Press, 1976). يظهر وصف لطريقة التعامل مع أعداد كونواي في: Donald E. Knuth, *Surreal Numbers* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1974). كما ناقش مارتن غاردنر هذه الأعداد في فصل «Nothing» في: *Mathematical Magic Show* (New York: Vintage Books, 1978). كما يمكن الاطلاع على فصل «Alef-one» في: *Mathematical Carnival* (New York: Knopf, 1975).

واحد من الخلق لكل عدد ترتيبي. عموماً، في اليوم a^{th}، يولد أعداد جديدة توضع في جميع الفراغات أو الفجوات بين الأعداد الأعداد المولودة سابقاً. ويمكننا نظام كونواي العبقري من أن نعالج ببراعة أي عدد يمكن التفكير به، مثل: $\aleph_1/\aleph_2$، $\sqrt{\omega+\pi}$، $\aleph_3+\frac{\sqrt{2}}{\aleph_5}$، أو أي عدد يخطر في بالك. كما توصَّل إلى تعريف للرمز التقليدي ∞ للانهاية المحتمَلة. وتُعرَّف اللانهاية المحتمَلة بأنها الفجوة بين الكِبَر المنتهي والكِبَر اللامنتهي للأعداد فوق الواقعية، وقام كونواي باشتقاق معادلة غريبة تجمع بطريقة سحرية بين اللانهاية المحتمَلة وأبسط أشكال اللانهاية الفعلية ω (أوميغا) واللانهاية المطلقة Ω (أوميغا الكبيرة)، وهي: $\sqrt[\Omega]{\omega} = \infty$.

على الرغم من أن نظام كونواي للأعداد السوريالية ذو بُعد جمالي ودلالة فلسفية، إلَّا أنه لم يحظَ بانتشار واسع بين علماء الرياضيات ذوي التفكير العملي. كانت إحدى المشاكل هي صعوبة تعريف العمليات ذات الترتيب الأعلى، مثل الرفع إلى قوة والتكرار الأُسِّي.

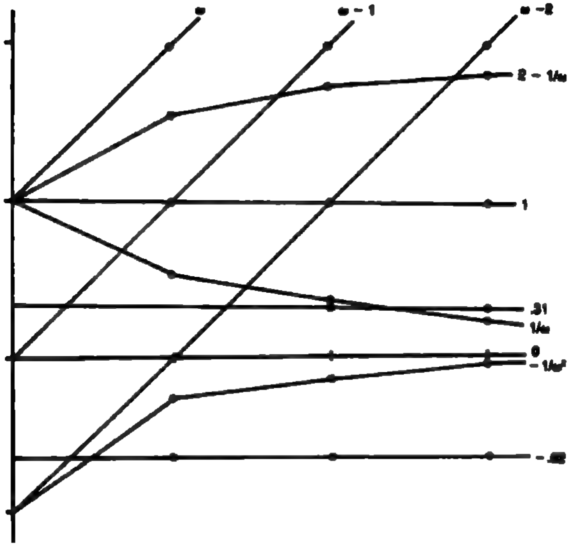
استخدم علماء الرياضيات الذين لم يفضِّلوا استخدام الأعداد السوريالية نظاماً آخر قدَّمه أبراهام روبنسون في ستينيات القرن الماضي[19]. يُعرف هذا النظام بـ «الأعداد الحقيقية الفائقة» أو «الحقيقيات غير القياسية»[20].

قدَّم كونواي الأعداد فوق الواقعية كـ «فجوات» بين الأعداد. على سبيل المثال، $\sqrt{\omega}$ يساوي ($0, 1, 2, \ldots | \ldots \omega/4, \omega/2, \omega$)، ومن الواضح أن $1/\omega$ يساوي ($0|\ldots ¼, ½, 1$). أمَّا أعداد روبنسون الحقيقية الفائقة، فتبدو كمتتالية من الأعداد الحقيقية. إذاً يمكن القول إن العدد الحقيقي الفائق هو الدالَّة أو التابع f من مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة N^+ ($N^+=\{1,2,3,\ldots\}$) إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R.

19- انظر الهامش 13 عن كتاب روبنسون.

20- الأعداد الحقيقية الفائقة hyperreal numbers، أو الحقيقيات غير القياسية nonstandard reals، هي طريقة لمعالجة الكميات اللانهائية في الكِبَر واللانهائية في الصِّغَر، وتُمثَّل عادة بـ R^*، حيث تُعتبر امتداداً لحقل الأعداد الحقيقية R، وتضم الأعداد الأكبر من أي عدد في R، ويُمثِّل مقلوب كل منها عدداً لانهائياً في الصغر. (المترجمة).

يبدو ذلك ملائماً، نظراً لأن جميع العمليات على الأعداد الترتيبية الحقيقية يمكن نقلها بطريقة «نقطية» إلى التابع الذي نسمِّيه أعداداً حقيقية فائقة. وبالتالي، f+g هي المتتالية $f+g(n)$ والتي تساوي $f(n)+g(n)$، والتابع $f^g(n)=f(n)^{g(n)}$. وكما ذكرنا سابقاً في القسم الفرعي «من أوميغا إلى إيبسيلون–صفر»، نقول إن $f<_{bep}g$ محققة إذا كان الخط البياني لـ f أخفض –ويبقى أخفض– من الخط البياني لـ g.



الشكل 45

يُمثِّل الشكل 45 بعض الدالَّات لأعداد حقيقية فائقة. ونلاحظ أن الدالَّة هي $I(n)=1/n$ هي «$1/\omega$». وأن أي عدد حقيقي قياسي يمكن تمثيله بالتابع الثابت $C_r(n)=r$. ومن الواضح أيضاً أنه لأي عدد حقيقي موجب r لدينا $C_0 <_{bep} I <_{bep} C_r$، حيث تُمثِّل I لانهاية في الصِّغَر.

استخدم كل من إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتس الأعداد اللانهائية في الكِبَر وفي الصِّغَر لتطوير حساب التفاضل والتكامل، واستخدموا الرمز «∞» للانهاية، والرمز «dx» للعدد اللامتناهي في الصِّغَر. وفي محاولة منه لتجميل

الأمور، أكَّد لايبنتس أن ∞ هي لانهاية محتمَلة، أو «متزامنة». بينما وصف نيوتن dx بأنه «مشتق زمني» أو تدفق.

سخر الأسقف جورج بيركلي من فكرة نيوتن، ووصفها بأنها «أشباح الكميات الماضية»، إلَّا أن تقدم تحليل مفهوم اللانهاية استمر بدون توقف طوال القرن الثامن عشر. وبالرغم من أن أحداً لم يكن واثقاً من إمكانية استخدام اللانهاية، لكن تقدم الأبحاث أعطى إجابات صحيحة أخيراً. وكما قال جان لو روند دالمبرت: «امضِ قُدُماً، وسيأتي الإيمان إليك». وفي منتصف القرن التاسع عشر، توصَّل كارل فايرشتراس وآخرون لطريقة يتجنَّبون فيها استخدام اللانهاية الفعلية في حساب التكامل[21]. وسنشرح باختصار التقنية التي تبنُّوها.

في التفاضل والتكامل، نقوم بعمليات مختلفة من الحساب $C(-,-,-)$، والتي تعتمد نتائجها على الأعداد التي ندخلها في العملية. ومن الطرق النموذجية لاستخدام اللانهاية في الكِبَر واللانهاية في الصِّغَر هي: لعددين حقيقيين محددين a و b، تكون نتيجة $C(\infty, dx, a)$ هي b. ويُعرَّف الاشتقاق والتكامل على أنهما العمليات الحسابية التي تقبل الأعداد الحقيقية، والأعداد اللامتناهية في الكِبَر و/ أو اللامتناهية في الصِّغر كمُدخلات، وتعطي أعداداً حقيقية محددة كنتائج.

قدَّم فايرشتراس تقنية تقوم على استبدال العبارة $C(\infty, dx, a) = b$ بما يلي: «إذا كان I عدداً حقيقياً كبيراً للغاية، و i عدداً حقيقياً صغيراً للغاية، ستكون قيمة $C(I, i, a)$ مقاربة جداً لـ b»؛ فإذا تركنا I تكبر و i تصغر، عندها نصل إلى اقتراب كافٍ من b. تُدعى هذه العملية بـ*عملية النهاية* (limit processes).

كان الأمر أسهل بالطبع لو تعاملنا مع حساب التفاضل والتكامل ونحن

21- انظر الهامش 13. يضم هذا الكتاب بحثاً تاريخياً مهماً عن علم التفاضل والتكامل. كما يمكن الاطلاع على: Abraham Robinson, «Some Thoughts on the History of Mathematics», *Compositio Mathematica* 20 (1968), pp. 188-193.

واثقون بوجود اللانهاية في الكِبَر واللانهاية في الصِّغَر، ولكانت العبارة $C(\infty, dx, a) = b$ صحيحة. لكن الخوف من اللانهاية منتشر في علم الرياضيات، لدرجة أنه حتى اليوم وحول العالم كله، يُدرَّس التكامل على أنه عملية *النهاية* بدلاً مما هو في الحقيقة: ***تحليل اللامتناهيات في الصِّغَر***.

يمكنني أن أخبركم، بصفتي شخصاً قضى جزءاً كبيراً من حياته في تعليم حساب التفاضل والتكامل، كم من المتعب والمضجر محاولة شرح النظرية المعقدة والعبثية للنهايات لأجيال بعد أجيال من الطلاب. وكثيراً ما أتذكر كلمات تشارلز هاورد هينتون:

«كم من الممتع نسيان بعض ما تعلَّمتُه في المدرسة؛ تلك الأشياء التي تعلَّمتُها لأن على المعلمين أن يعملوا ليكسبوا عيشهم فحسب، وليس لفائدة قد أكسبها كما أعتقد. ذلك النعيق التقليدي الموروث لسنوات طويلة، والذي يُدعى القواعد، وتلك القوقأة البشرية التي تُدعى اللغة. كم أود أن أنسى القواعد»[22].

ويبقى الأمل لمستقبل أفضل. فقد وُضِعت اللامتناهيات في الصِّغَر على أسس منطقية لا يرقى الشك إليها من خلال أبحاث روبنسون في الأعداد الحقيقية الفائقة، كما أن حسابات التكامل التي تقوم عليها لا تنفك تظهر في كل مكان[23].

22- Charles Howard Hinton, *Speculations on the Fourth Dimension: Selected Writings of C. H. Hinton* (Rudolf v.B. Rucker, ed., New York: Dover Publications, 1980), p. 81. اعتقد هيلتون أن فضاءنا ذو سماكة رقيقة، لذا فإن أصغر الجسيمات في أدمغتنا هي في الواقع رباعية الأبعاد. لذلك، حسب رأيه، من الممكن تكوين صور رباعية الأبعاد في الدماغ. وفق خط التفكير هذا، يمكن أن نجادل بأنه إذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى ما لانهاية، فإننا قادرون على تكوين صور لانهائية في أدمغتنا.

23- H. Jerome Keisler, *Elementary Calculus* (Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1976), and Henle and Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1978).

اللانهايات الفيزيائية العليا

دعونا نفترض أن كوننا يمتد لأكثر من أوميغا من الأميال، هل يمكننا السفر من الأرض لمسافة تبلغ عدداً فوق منتهٍ من الأميال في الفضاء؟

إن ذلك ممكن، بافتراض أن المرء يمكن أن يحقق تسارعاً يقارب سرعة الضوء (7 مليار ميل في الساعة). وتُشرح هذه الفكرة في نظرية أينشتاين النسبية الخاصة. فكلما قاربت سرعة المتحرِّك سرعة الضوء، يتباطأ الزمن بالنسبة له مقارنة مع بقية الكون. أي إن بإمكاننا السفر أوميغا مليار من الأميال خلال أربع ساعات فقط إذا حققنا تسارعاً مناسباً. سيستغرق اجتياز المليار الأول من الأميال (بأربعة أضعاف سرعة الضوء) حوالي ساعتين، والمليار الثاني (بستة أضعاف سرعة الضوء) حوالي ساعة، والمليار الثالث (بسبعة أضعاف سرعة الضوء) حوالي نصف ساعة فقط. وبذلك سنتجاوز أوميغا ميل بعد مرور أربع ساعات.

في روايتي «الضوء الأبيض»، وصفتُ رحلة مماثلة تقوم بها شخصيات لامادية، أو لنقُل «روح»، يمكنها التسارع بلانهاية باستخدام قوة الإرادة المجرَّدة. وإليكم بعضاً من هذا الوصف على لسان إحداها وتُدعى كاثي:

«كان الجزء الأول من الرحلة مملاً. ومع أننا كنا نتحرك بتسارع ثابت، إلَّا أن الخروج من النظام الشمسي استغرق ساعة من الزمن. وبعدها استغرقنا ساعة ونصف عبر الفراغ للوصول إلى النجم التالي.

أصبحت الرحلة مشوِّقة بعد ثلاث ساعات. بلغنا سبعة أضعاف سرعة الضوء. وبسبب معايير الزمن والأطوال المشوهة لدينا، بدت سرعتنا ثلاثة أضعاف ذلك. وبدأت آثار النسبية الغريبة في الظهور.

بدا لنا كأننا في كهف وننظر إلى الخارج. بدا كل ما خلفنا وما يحيط بنا من الجوانب كأنه عدم، وهو ما يُعرف في نظرية النسبية بـ «المكان الآخر»، بينما ظهرت النجوم التي حولنا أمامنا مباشرة بطريقة ما. ازداد تسارعنا.

بدا أن عبورنا لألف سنة ضوئية عبر المجرة استغرق نصف ساعة فقط، ويا لها من نصف ساعة! كنتُ أنظر من مخروط السرعة الذي يحتوينا إلى دائرة الرؤية التي تظهر فيها النجوم أمامي... كانت معظمها تتشبث بحافة الدائرة. وببطء، تترك إحدى النجوم الحافة وتتسارع نحو المركز، ثم فجأة تتلاشى، ونجتازها لتعود إلى حافة مجالنا البصري.

ظهر لنا نسق من ومضات النجوم التي نعبرها، ثم دخلنا فيه. كان الأمر أشبه بالاستماع إلى طقطقة عجلات القطار. تلاشى كل شيء باستثناء ومضات الضوء، واندفعتُ لأجعلها تتسارع.

بعد ذلك ازدادت الأنساق... إنها عناقيد النجوم... ومع تسارعنا أكثر بدأتُ أرى نسقاً ثانياً وثالثاً. فجأة توقف الوميض، لقد أصبحنا خارج المجرة.

تقلَّصت دائرة مجالنا البصري كثيراً لدرجة شعرتُ فيها أني أنظر من نافذة صغيرة. كان الظلام يحيط بنا من جميع الجهات، وعرفتُ حينها الخوف. عقد الألم ظهري، لكنني دفعتُ نفسي لأزيد السرعة أكثر فأكثر، ولأجعل النافذة أصغر.

ظهرت بضعة أقراص من الضوء قادمة من اللانهاية ثم تلاشت ثانية، وازدادت أعدادها شيئاً فشيئاً؛ إنها المجرات. شعرتُ كأني ندفة في عاصفة ثلجية. طرنا عبر بعض المجرات، ونحن ضمن فقاعتنا الضبابية. كنا نطير أسرع من أن نرى النجوم المفردة.

اندفعنا بقوة أكبر. كنا نعبر مجرة كل بضع ثوانٍ، وكما من قبل بدأتُ أرى أنساقاً من الومضات.

من الآن فصاعداً كان كل ما استطعتُ رؤيته هو ومضات تكبر وتكبر حتى تصبح ضوءاً ثابتاً، ثم تعود فجأة إلى التردد، لتكبر مجدداً وتصبح ضوءاً أكثر سطوعاً من ذي قبل. كانت تلك مشاهد عبورنا من عنقود نجمي إلى آخر في مستوى أعلى.

كنتُ مرهقةً للغاية. وكانت الومضات تبني مشاهد في عقلي. وكان تركيزي يتلاشى سريعاً مع تحديقي بالضباب الضوئي المتزايد أمامنا. وحاولتُ أن أزيد سرعتي لأسرِّع وصولي إليه.

كان المشهد أمامنا ما يزال يبدو ذا عمق ويوحي بأنه من ثلاثة أبعاد، لكني لاحظتُ أن زيادة السرعة تتسبب في تسطُّح هذا المشهد وجعله أقرب ليكون ثنائي الأبعاد. لذا أصررتُ على التسارع لأجعله مسطَّحاً تماماً.

لم تعد طاقة الدفع تبدو منبثقة مني أو من كاثي. كانت الطاقة تبدو كأنها ضوء يمرّ عبرنا.. ونحن نوجهه فحسب.

ومع جهد إضافي أخير، حوَّلنا الكون إلى نقطة مفردة واحدة من الضوء»[24].

كان هدفي من ذكر هذا الاقتباس الطويل إظهار فكرة الحركة التي تتجاوز اللانهاية بصورة طبيعية نوعاً ما. وعلى كل حال، يتطلب القيام برحلة كهذه، في مركبة فضائية حقيقية، كمية لامحدودة من الطاقة. ولكن ربما أمكننا أن نغرف الوقود من النجوم التي نعبرها!

توجد آثار جانبية للسفر مسافة لانهائية في الفضاء. وفق نظرية النسبية، لن نجتاز أوميغا من الأميال بعيداً عن الأرض فحسب، بل سنجتاز أيضاً أوميغا من السنوات إلى المستقبل. ظهر مفهوم مقياس الزمكان الكوني اللانهائي في النقاشات الفيزيائية الفلكية الحديثة. من المتوقع مثلاً أن الوقوع في ثقب أسود ينقل المرء عدداً لانهائياً من السنوات إلى المستقبل، وفي كون مختلف تماماً[25].

توجد طريقة مختلفة لتحقيق اللانهايات الفيزيائية، وهي افتراض وجود العديد من الأكوان الموازية الأخرى. وبالفعل، إذا كان كوننا محدداً بألِف-صفر من المعلومات مثلاً، وكانت كل الأكوان المحتمَلة موجودة، عندها سيكون هناك على الأقل ألِف-واحد من الأكوان الأخرى. افترض «هيو

24- Rudy Rucker, *White Light*, pp. 71-73.

25- W. Kaufmann, *Cosmic Frontiers of General Relativity* (Boston: Little, Brown, 1977).

إيفرت» تفسيراً شهيراً للعوالم المتعددة وفق مفاهيم ميكانيك الكم. لكن إحدى الصعوبات التي تظهر من شكوك الفلسفة الكانتية، هي أنه من حيث المبدأ لا يمكن اكتشاف العوالم الموازية الأخرى.

إن فكرة كون واحد يدوم $\aleph_1$ سنة، هي نفسها فكرة $\aleph_1$ من الأكوان التي يدوم كل منها ω سنة. وفي كلتا الحالتين، على المرء أن يقوم بفعل خارق ليتمكن من الخروج من نسيج الزمكان الذي بدأ فيه. وسواء سُمِّي هذا الفعل الخارق «السفر إلى ما لانهاية في المستقبل» أو «القفز إلى تيار زمني آخر موازٍ»، فهو الفعل نفسه[26].

ماذا عن اللانهايات العليا في الصِّغَر؟ كما سنرى في التدريب الأول، أثبت كانتور في عام 1873 أن الفضاء الرياضي يضمّ على الأقل أَلِف–واحد من النقاط. لذا إن كان فضاؤنا الفيزيائي غنياً بما يكفي ليمثِّل كل عدد حقيقي (مثل ...3.14159) نقطة في الفضاء، عندها توجد على الأقل أَلِف–واحد نقطة في الفضاء. أمَّا إذا احتوى الفضاء الرياضي أكثر من أَلِف–واحد نقطة، فتلك تبقى مسألة مفتوحة: مشكلة الاستمرارية.

قاد افتراض كانتور بأن كوننا الفيزيائي هو الفضاء الرياضي نفسه إلى أفكار غريبة: تتألف الكائنات المادية من أَلِف–صفر من الذرات، والكائنات الأثيرية من أَلِف–واحد من الذرات. دعونا نرى كيف توصَّل إلى هذه الفكرة[27].

اعتقد كانتور بإمكانية شطر أي جسم كروي مهما كان صغيراً إلى نصفين،

26– نوقشت هذه الفكرة في: José Benardete, *Infinity* (Oxford: Clarendon Press, 1964). يعارض بيناردیت الادعاء القائل بأن «عدد النجوم في الكون هو أَلِف–واحد»، ويصرّ على عدم إمكانية التحقق منه، وبالتالي فإنه –في نظر الموضوعية المنطقية– ادعاء لا معنى له. كما قدَّم بيناردیت بعض الأفكار الأصيلة والمميزة حول مفارقات زينون.

27– انظر: Cantor's *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 275–277. أو ترجمتي: Rudy Rucker, «One of Georg Cantor's Speculations on Physical Infinities», *Speculations in Science and Technology* (October, 1978), pp. 419–421.

كما ناقشت فكرة كانتور هذه في روايتي *White Light*، في الفصل 13.

لذا فالمكونات النهائية للمادة لا بد أن تكون جُسيمات كروية صغيرة لا يمكن شطرها، وسمَّاها «الجوهر الفرد». (أُخِذت كلمة «الجوهر الفرد» من غوتفريد فيلهيلم لايبنتز، الذي وصف في كتابه «Monadology» الكون بأنه مجموعة من الجواهر المفردة البسيطة وغير المرئية التي تتفاعل بتناغم فيما بينها)[28]. واعتقد كانتور أن أي قطعة من المادة تتكون من ألِف-صفر من جوهر الفرد، والتي تحتشد معاً بكثافة كما تحتشد الأعداد المنطقية على مستقيم الأعداد.

كان الاعتقاد بوجود الأثير منتشراً في زمن كانتور. ولم يعتبر كانتور الأثير مادة متغلغلة تملأ الفضاء، بل اعتقد أنه كما المادة العادية، مكوَّن من ذرات، وأن ظواهر مثل الضوء والحرارة والكهرباء والمغناطيسية تُفسَّر على أنها خيوط وكرات من الأثير. ولأن على الأثير أن يكون أكثر دقة ورقة من المادة العادية، اقترح كانتور أن كل قطعة من الأثير تتكون من ألِف-واحد من «الجوهر الفرد». وبالتالي أصبح الاعتقاد بأن المادة تشبه كومة من الرمال، وتتكون من مجموعة دقيقة من الكرات، بينما الأثير يشبه الماء، كائن مستمر يمكنه التسلل عبر الفجوات اللامتناهية في الصِّغَر في المادة.

هل يمكننا أن نصنع شيئاً من نظرية كانتور هذه؟ لا يحتاج العلم في وقتنا الحاضر إلى الأثير لتفسير أي شيء، فقد نقض وجوده تماماً. لكن قد نستفيد بعض الشيء من نظرية كانتور. على سبيل المثال، اقترح «تشارلز ساندرس بيرس» أن بإمكاننا حل مشكلة العقل-الجسد باعتبار العقل البشري يعمل ككائنات كانتور الأثيرية. ربما كان لدينا أرواح عضوية، تتكون كل منها من ألِف-واحد من الجوهر الفرد الأثيري!

يمكن أن نجد اللانهايات الأكبر من الألِف-واحد في الجهة المقابلة للكِبَر، اللامتناهيات في الصِّغَر، وخاصة إذا كان للفضاء استمرارية مطلقة كما ناقشنا في القسم السابق. من الصعب تخيل أمور كهذه، لكن يمكن لنظرية مفيدة مع نتائج تجريبية أن تجد أسساً نظرية في الفضاء المستمر المطلق. أو يمكن أن تُرى الجُسيمات متفرِّدة في ترتيب فوق نهائي متنوع.

28- Gottfried Leibniz, *The Monadology and Other Philosophical Writings* (Robert Latta, trans., London: Oxford University Press, 1965).

ألغاز ومفارقات الفصل الثاني

1. هل يمكنك تنظيم وقتك لتسافر مسافة $\omega+\omega$ ميلاً *في ساعة واحدة*؟

2. ليكن a عدداً حقيقياً بين (–1) و(1). ولتكن S مجموع المعادلة ($S=1+a+a^2+a^3+...$) أثبت أن S تساوي $1/(1-a)$ بضرب طرفي المعادلة بـa، ثم طرح المعادلة الجديدة من المعادلة القديمة. واختبر المعادلة مع قيم عند (½, -½, ⅓, ⅔, 1). لاحظ ما ينتج عند كل من قيم (2 ,1– ,1).

3. كيف يمكننا أن نستضيف $\omega.\omega$ من الزوّار في فندق هيلبرت ذي ω غرفة؟

4. لنفترض أن صفحات سجل الزوّار في فندق هيلبرت تتسع لعدد محدود من الأسماء، وعلى الزوّار الجدد تسجيل أسمائهم في الفراغ التالي للاسم السابق دائماً. كم عدد الصفحات التي يجب أن يحتويها السجل ليبقى فيه فراغ لتسجيل اسم زائر جديد؟

5. في قصته القصيرة «كتاب الرمل»، يصف خورخي لويس بورخيس كتاباً لانهائياً ليس له صفحة أولى أو أخيرة[29]. كُتِب الكتاب بأبجدية أجنبية، لكنه يتضمن رسوماً توضيحية في بعض الصفحات. ويلاحظ راوي القصة

29- Jorge Luis Borges, *The Book of Sand* (New York: E. P. Dutton, 1977).
في هامش قصته «مكتبة بابل»، يذكر بورخيس وصفاً مختلفاً وخيالياً لكتاب يضمّ عدداً لانهائياً من الصفحات، المكدَّسة مثل الأعداد المنطقية. وفي كل مرة يمسك فيها المرء ما يظنه أنه صفحة واحدة، سيظهر له أنه مجموعة من صفحات أقل سمكاً. وفي روايتي *White Light*، أصف كتاباً بعدد c من الصفحات، وألِف–صفر من الكلمات في كل صفحة.

أن لكل صفحة من كتاب الرمل رقماً طبيعياً مختلفاً، يبدو عشوائياً، في الزاوية. ويذكر أيضاً أنه متأكد من أن الرسوم التوضيحية تظهر كل 2000 صفحة. ما نوع الترتيب الذي تماثله صفحات الكتاب؟

6. ما الفرق بين $\aleph_1.\omega$ و $\omega.\aleph_1$؟

7. نقول عن عدد ترتيبي a أنه عدد زوجي إذا وُجد عدد ترتيبي b حيث $a=2.b$. والآن، هل أوميغا ω عدد زوجي؟ وهل $\omega+4$ عدد زوجي؟

8. نقول عن عدد ترتيبي a إنه عادي إذا لم توجد طريقة لكتابة a كمجموع لأعداد أصغر منه. مثلاً، العدد 10 ليس عادياً لأنه يُكتب كمجموع أعداد أصغر منه (2+3+5 أو 9+1). وإن أوميغا ω عدد عادي لعدم إمكانية كتابته كمجموع أعداد منتهية، بينما $\omega+\omega$ ليست عدداً عادياً لأنها مجموع عددين أصغر منها. والآن، هل أَلِف–واحد $\aleph_1$ عدد عادي؟ توجد ثلاثة أعداد طبيعية منتهية عادية فقط. ما هي؟

9. تُعطى النقاط في المستوى الديكارتي العادي بالإحداثيات (x, y) من الأعداد الحقيقية. لنفترض أن النقاط تُعطى في مستوى «ديهن»[30] بالإحداثيات (x, y) من أعـداد منتهية الكِبَر فوق واقعية[31]. (يُسمح بالأعداد اللامتناهية في الصِّغَر وتُستثنى الأعداد اللامتناهية في الكِبَر.) والآن، أثبت أن مسلَّمة إقليدس الخامسة تفشل في مستوى «ديهن»، مُظهِراً أن العديد من المستقيمات تمر عبر النقطة (0,1) ولا تتقاطع مع المحور x في أي نقطة منتهية، ثم استنتج أنه يمكن في مستوي «ديهن» ومن نقطة واحدة مرور أكثر من موازٍ لمستقيم واحد.

30– ماكس ويليام ديهن (1878–1952)، عالم رياضيات ألماني، اشتُهر بأعماله في الهندسة والطبولوجيا ونظرية المجموعة. (المُترجِمة).

31– تُنسب هذه البنية إلى ماكس ديهن، ويظهر وصف لها في: David Hilbert, *The Foundations of Geometry* (Chicago: Open Court, 1902), p. 129. الأمر المثير للاهتمام حول مستوي ديهن هو أنه بالرغم من عدم تحقق مسلمة إقليدس الخامسة فيه، إلا أن مجموع زوايا المثلث فيه تبقى 180 درجة. والسبب في ذلك أن ديهن استخدم الأعداد الحقيقية غير القياسية من أجل المستقيمات، بينما استخدم الأعداد الحقيقية القياسية لقياس الزوايا.

10. ذكرت رواية خيال علمي العبارة التالية على أنها قانون طبيعي: «كل خيط يملك نهاية، يملك حتماً نهاية في الجهة الأخرى»[32]. هل ذلك صحيح بالضرورة؟

أجوبة ألغاز الفصل الثاني

1. يجب أن نقطع ω الأولى من الأميال في النصف الأول من الساعة، و ω الثانية في النصف الثاني من الساعة. ولنقطع ω الأولى في النصف الأول من الساعة، يجب أن نقطع n^{th} من الأميال في الفاصل الزمني بين $1\backslash 2 - 1\backslash 2^{n}$ و $1/2 - 1/2^{n+1}$.

2. نختبر المعادلة مع قيم a:

$$1+1\backslash 2+1\backslash 4+1\backslash 8+1\backslash 16+...=2$$

$$1-1\backslash 2+1\backslash 4-1\backslash 8+1\backslash 16-...=1\backslash(1-1\backslash 2)=1\backslash(3\backslash 2)=2\backslash 3$$

من أجل $a = 1\backslash 3$، يكون المجموع $3\backslash 2$. ومن أجل $a = 2\backslash 3$، يكون المجموع 3. من أجل $a=1$، يكون المجموع $10\backslash 9$، والذي يمكن أن يُكتب ...1.11111.

والآن إذا طبَّقنا $1\backslash(1-a)$.، نحصل على $1+1+1+1+...=1\backslash 0$، ويُدعى هذا الجواب ∞. ويبدو هذا منطقياً إلى حدٍّ ما. أما إذا استبدلنا $a = -1$، نحصل على $1-1+1-1+1-...=1\backslash 2$. ولهذا الجواب علاقة مهمة مع مسألة المصباح في الفصل الأول (اللغز رقم 2). يمكننا أن نعتبر أن إضافة «1» تقابل إضاءة المصباح، وطرح «1» تقابل إطفاء المصباح. سيظهر الجواب مساوياً لـ 1 عندما يكون المصباح قيد التشغيل، ومساوياً لـ 0 عندما يكون مطفأً. تُدعى هذه السلسلة «سلسلة غراندي»، ويمكن أن نجادل أن الجواب هو 1، أو هو 0. ومن الممتع أن نجد أن هذه المعادلة

32- Robert Anton Wilson, *Schrödinger's Cat: The Universe Next Door* (New York: Pocket Books, 1980), p. 103.

تقبل حلاً وسطاً هو 1\2. أما إذا وضعنا قيمة أصغر من −1 أو أكبر من 1، ستصبح النتيجة غير منطقية؛ فإذا استبدلنا $a=2$، نجد أن المعادلة أصبحت $1+2+4+8+16+...=-1$، وهذا غير ممكن.

3. توجد بعض الصعوبة في هذه المسألة. إحدى طرق الحل هي اعتماد حقيقتين: 1) يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية، (العدد الأولي هو العدد الذي لا يملك قواسم باستثناء الواحد والعدد نفسه)، 2) إذا كان p وq عددين أوليين مختلفين، وm وn عددين طبيعيين، فإن p^m وq^n عددان مختلفان أيضاً. والآن، ما نفعله هو أن نضع ω الأولى من الضيوف في ω من الغرف التي تحمل أرقاماً مرفوعة إلى القوة 2، ونضع ω الثانية من الضيوف في ω من الغرف التي تحمل أرقاماً مرفوعة إلى القوى 3، ونضع ω الثالثة من الضيوف في ω في الغرف التي تحمل أرقاماً مرفوعة إلى القوة 5، ...، ونضع ω ذات الترتيب n في ω من الغرف التي تحمل أرقاماً مرفوعة إلى القوة «العدد الأولي ذو الترتيب n»، وهكذا. نلاحظ أن هذه الطريقة تترك الكثير من الغرف فارغة، مثل الغرفة رقم 6، ولكن المطلوب هو أن نلائم الضيوف في الغرف فحسب. يمكن إيجاد طريقة لا تبقي أي غرفة فارغة في الفندق، وذلك بوضع الضيف ذي الرقم m^{th} من ω ذات الترتيب n من الضيوف في الغرفة ذات الرقم $1\backslash2(n^2+m^2+2mn-3m-n+2)$.

4. يجب أن يحتوي السجل على $\aleph_1$ من الصفحات. نتذكر أن $\aleph_1$ هو أول عدد ترتيبي غير قابل للعد. يمكن استضافة زائر يحمل أي عدد ترتيبي قابل للعدّ في ω من غرف الفندق. لذا للتأكد من وجود مكان لتسجيل اسم زائر جديد، نحتاج إلى عدد من الصفحات أكبر من أي عدد قابل للعدّ، أي نحتاج إلى $\aleph_1$ من الصفحات.

5. إن ترتيب صفحات الكتاب يماثل مجموعة الأعداد الصحيحة: $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. سنبدأ بالاحتمال الثاني: لا يمكن أن يضم

الكتاب عدداً لا يُحصى من الصفحات. الاحتمال الثالث: يوجد بعد كل صفحة صفحة أخرى، وإلا فلن يتمكن المرء من العدّ من رسم توضيحي إلى رسم آخر. وهذا يستبعد إمكانية وجود أعداد ترتيبية كثيفة، مثل مجموعة الأعداد المنطقية. أما الاحتمال الأول: يقتضي أن الكتاب يضمّ عدداً لانهائياً من الصفحات، وأنها لانهائية في الاتجاهين. إن مجموعة الأعداد الصحيحة هي الوحيدة القابلة للعدّ، وما من ترتيب كثيف بدون عنصر أول أو أخير. في حاشية الصفحة 58 من كتاب «Labyrinths»، يصف بورخيس كتاباً «يضم عدداً لانهائياً من الصفحات اللامتناهية في الرقة»، والمُرتبة مثل الأعداد المنطقية. وفي كتابي «White Light»، أصف كتاباً يحتوي على عدد من الصفحات يماثل مجموعة الأعداد الحقيقية.

6. إن $\omega.\aleph_1$ تساوي $\aleph_1$، لكن $\aleph_1.\omega$ ليست كذلك. إن أي مقطع ابتدائي من نسخ ω بعدد $\aleph_1$ ستحمل الشكل $\omega.a+n$، حيث a معدود وn مُنتَهٍ. ولأن هذه الأعداد الترتيبية قابلة للعدّ، فلا يمكن لـ $\aleph_1.\omega$ أن تتجاوز أبداً $\aleph_1$ غير القابل للعد. لكن $\aleph_1.\omega$ هي نسخ من $\aleph_1$ بعدد ω، لذا ستتجاوز $\aleph_1$ بعيداً.

7. تحت هذا التعريف، ω عدد زوجي. كما أن $2.\omega=\omega.\omega+4$ عدد زوجي أيضاً، وأيضاً $2.(\omega+2)=\omega+4$ عدد زوجي. نلاحظ هنا أن عملية توزيع الضرب على الجمع ليست تبديلية، لأن $(\omega+2).2=\omega.2+2.(2+\omega)$. ونلاحظ أيضاً أننا لو غيَّرنا التعريف قليلاً وقلنا إن العدد الترتيبي a زوجي إذا وُجد عدد ترتيبي b حيث $a=b.2$، فإن $\omega+\omega$ سيكون العدد فوق المنتهي الزوجي الأول. وبعبارة أخرى، «يمكن الوصول إلى عدد زوجي بجمع عدد b من «2» مع بعضها البعض؛ ويمكن الوصول إلى عدد زوجي بجمع اثنين من العدد b». إن العبارة الأولى أكثر فائدة من الثانية، لكن الخلط بين العبارتين أدى إلى وقوع بعض المفكرين في مغالطة القول إن ω عدد زوجي وفردي في الوقت ذاته.

8. 0، 1، 2، هي أعداد منتهية وعادية. وسنناقش ذلك في القسم الثاني من التدريب الأول.

9. لنفترض أن e كمية لامتناهية في الصِّغَر، ولدينا المستقيم ذو المعادلة: $y=1-e.x$. يتمايز هذا المستقيم عن المحور y ذي المعادلة $y=1$، في أنه يسقِط للأسفل كمية لامتناهية في الصِّغَر مع كل واحدة حركة يقطعها نحو اليمين. وإذا كان سيتقاطع مع المحور x في نقطة (0 ,1)، فعندها ينتج $0=1-e.I$، وبالتالي $I=1\backslash e$. لكن بما أن e كمية متناهية في الصِّغَر، فإن $e<1\backslash n$ لأي عدد طبيعي n، وهذا يقتضي أن $n<1\backslash e$. لذا، في حال كان $I=l\backslash e$، إذاً I عدد لانهائي. وهكذا نجد أن المستقيم $y-1-e.x$ يحقق الشروط التالية: 1) يمر بالنقطة (0، 1)؛ 2) يتمايز عن المحور y ذي المعادلة $y=1$؛ 3) يوازي المحور x، بمعنى عدم تقاطعه معه أبداً في نقطة منتهية.

10. لا، ليس بالضرورة. لنفترض وجود خيط طوله ω. كما لا يوجد عدد طبيعي أخير، فلا توجد نقطة أخيرة في خيط طوله ω. في المقابل، يمكن أن نفترض وجود خيط طوله يماثل المجموعة نصف المفتوحة [0, 1) والتي تساوي $\{x : 0 \leq x < 1\}$. والمشكلة هنا أن ما من عدد حقيقي (أو سوريالي) يأتي مباشرة قبل 1.

الفصل الثالث

اللامُسمّى

يناقش هذا الفصل ثلاث مفارقات منطقية شهيرة، هي: مفارقة بيري، ومفارقة ريتشارد، ومفارقة الكاذب. في رأيي، تشير كل مفارقة إلى وجود مفهوم عقلي يناقض أي نظام موجود. ولأن العقل البشري فهم هذه المفارقات، لذا أعتبر هذا العقل لانهائياً.

يناقش القسم الأول مفارقة بيري، والتي تتعامل مع استحالة وجود أي تفسير لاستخدامنا اللغة. وتتدخل في حدود ما يصنعه الإنسان من «آلات للتفكير».

يطرح القسم الثاني عدة مواضع تتعلق بمفارقة ريتشارد. وعلى نحو خاص، نتساءل إذا كان هناك أي شيء، في الأرض أو في السماء، عشوائياً فعلاً. والعشوائية هنا بمعنى عدم وجود وصف منتهٍ، أو بمعنى التعقيد اللانهائي.

قسم «ما هي الحقيقة؟» يتناول طيفاً غنياً من المسائل التي تنبثق من العبارة البسيطة: «هذه العبارة ليست صحيحة».

مفارقة بيري[1]

ما هو أكبر عدد طبيعي يمكنك التفكير به؟ إذا كان عقلك لانهائياً -وهو كذلك على الأغلب- ربما تُصرُّ على أن بإمكانك التفكير بـ «كل» الأعداد الطبيعية. لذا من الأفضل أن أغيِّر صيغة السؤال: ما هو أكبر عدد طبيعي يمكنك وصفه؟ من جهة، نبدو عاجزين عن وصف أكبر عدد، فإذا سمّينا أكبر عدد «G»، سيكون هناك أعداد أكبر منه مثل G^G، $G.G$، $G+G$، $G+1$، وغيرها. ومن جهة أخرى، يجب أن يوجد حدٌّ من نوع ما لكِبَر الأعداد الطبيعية القابلة للوصف. وسواء كان عقلك لانهائياً أم لا، فلن تتمكن بالتأكيد من ذِكر كل الأعداد الطبيعية في حياتك كلها.

تقدِّم هذه الحقيقة الأخيرة مخرجاً من المعضلة التي يطرحها السؤال عن أكبر عدد يمكننا وصفه. والحقيقة أيضاً أنني قد أناقش في حياتي العدد G، ولكن سأموت قبل أن أتمكن من الوصول إلى $G+1$؛ فإذا تمكنا من مناقشة G فليس بالضرورة أبداً أن نتمكن من مناقشة $G+1$. ولكن ماذا عن العبارة: «العدد u_0 هو أصغر عدد طبيعي لن أتمكن من وصفه أبداً» أو «العدد W هو أول عدد طبيعي يأتي بعد أكبر عدد يمكنني وصفه». هل هذه العبارات هي أسماء فعلية لأعداد؟ ولكن من يستطيع أن ينكر وجود هذين العددين فعلاً، على الرغم من أن قيمها الدقيقة لن تتوضَّح قبل أن أموت؟

يوجد عالَم من الأعداد الطبيعية القابلة للوصف إنسانياً، ووراء هذا العالم، وراء ما يمكن أن نسمِّيه نقطة تحول، يوجد عالم آخر كامل من الأعداد

1- نُشر هذا القسم سابقاً كبحث بعنوان: «The Berry Paradox», *Speculations in Science and Technology* (June, 1979), pp. 197-208.

الطبيعية التي لا يمكن تحديدها بأي وصف قصير بما يكفي للاستيعاب البشري. هذه الأعداد الطبيعية غير القابلة للتسمية هي ما يهمنا هنا.

يوجد بالطبع إدراك ما بأن أي عدد طبيعي يملك اسماً وفق التمثيل الأساسي العشري المألوف. ولكن بالنسبة لي ولكم، لا يمكن لشيء مثل (784...543) أن يكون بمثابة وصف لعدد إذا كانت «...» تدل على سلسلة عشوائية من الأرقام التي تمتد من هنا إلى الجانب الآخر من المجرة.

سنجعل السؤال عاماً أكثر وبعيداً عن الاختلافات الفردية، وسنحدّد الوصف بمليار كلمة، فيصبح السؤال: ما هو أكبر عدد طبيعي يمكن أن يصفه أحد ما في أقل من مليار كلمة؟ أو يمكننا صياغة السؤال بطريقة أخرى: ما هو أول عدد طبيعي لا يمكن وصفه في أقل من مليار كلمة؟

اخترتُ أن يكون الحد مليار كلمة اعتماداً على تجربتي الشخصية، فأنا في عمر الخامسة والثلاثين، وقرأتُ حتى الآن حوالي 300 مليون كلمة وسمعتُ حوالي 200 مليون كلمة، أي ما مجموعه نصف مليار كلمة. لذا تبدو «مليار كلمة» مقداراً مقبولاً لعدد الكلمات التي قد يستوعبها شخص ما خلال فترة حياته كلها. والفكرة في سؤالي هي: ما هو أصغر عدد طبيعي لا يمكن وصفه بكلمات يستوعبها شخص ما؟

ربما لاحظتم أمراً مريباً هنا. لنفترض وجود أعداد طبيعية لا يمكن وصفها، ولنفترض أن أصغرها هو العدد u_0، لكن ما قلتُه تواً يبدو وصفاً للعدد غير القابل للوصف.

المفارقات منابع غنية للخيال، تشبه السحر والتعويذات الأسطورية. فالتفكير في إحدى مفارقات زينون يبعث إحساساً أشبه بتأمل تمثال لإلهة الجمال أو التمعُّن في ماندالا. ويمكن لبعض المفارقات البارعة ألَّا تُحَلَّ أبداً. والمفارقة التي تطرَّقنا إليها في الفقرة السابقة هي نسخة من مشكلة كيفية التحدث عن أشياء لا يمكننا الحديث عنها. كان أول من قدَّمها بشكلها الحالي أمين مكتبة جامعة أوكسفورد ويُدعى «ج. ج. بيري»، والذي أخبرها لـ «برتراند راسل»، الذي وصفها بدوره بهذه الطريقة: «إن عبارة (أصغر عدد لا يمكن تسميته في أقل من تسعة عشر مقطعاً لفظياً) هي بذاتها تتكوّن من

أقل من تسعة عشر مقطعاً لفظياً؛ وهذا ما يُعتبر تناقضاً»[2] . إن وجود مثل هذه التناقضات يمنحنا طرقاً لاستمداد حقائق مهمة حول العلاقة بين العقل والكون. ولا أحد أتقن ذلك أكثر من بورخيس:

«إن العالَم هو حُلمُنا (حلم الألوهية الكلية التي تعمل في دواخلنا). وبينما حلمنا به على أنه ثابت، غامض، مرئي، كلِّي الوجود في المكان وسرمدي في الزمان؛ سمحنا بأن تتخلل عمارته هشاشة وتشققات واضحة من اللامعقولية لتذكِّرنا دائماً أن العالم زائف»[3].

في الواقع، بما أن المفارقات موجودة في طبيعة الفكر العقلاني، فلا أعتقد أنه كان بإمكاننا «نحن» اختيار أن نحلم بعالم خالٍ من المفارقات. وبدلاً من القول إن المفارقات تشير إلى أن العالم العقلاني «زائف»، أقول إنها تشير إلى أن العالم غير مكتمل، وأن الواقع أكثر مما تراه العين.

من أجل إدراك أكثر غنًى لِما تنطوي عليه مفارقة أول عدد غير قابل للتسمية، من الضروري التفكير قليلاً في طريقة تسمية الأعداد الطبيعية.

تسمية الأعداد

تخيل: فتاة صغيرة نشيطة ترتدي فستاناً أصفر، تتبعها بضع بطات بيضاء عبر درب مليء بالعشب الأخضر، ثم تنزل البطات إلى بحيرة من الماء الأزرق. كم عدد البط؟

من الصعب فعلاً تجميد صورة ذهنية وإحصاء عناصرها. وبمجرد أن تقرر وتركِّز كامل وضوحك العقلي على جزء واحد، يصبح الباقي ضبابياً وزائغاً.

2- Bertrand Russell, «Mathematical Logic is Based on the Theory of Types», *American Journal of Mathematics* 30 (1908), p. 223.

يقدِّم راسل في هذا البحث تسلسلاً هرمياً للغة، وفيه تكون قابلية التسمية في اللغة مفهوماً غير قابل للوصف إلّا في مستوى أعلى من مستوى قابلية التسمية. وبالتالي يمكن لنا أن نصل إلى المستوى متجاوزين كل الأعداد الترتيبية. وأثبت غودل أنه لا يمكن إضافة أي شيء بعد المستوى ألِف.

3- Jorge Luis Borges, «Avatars of the Tortoise», in *Labyrinths*, (New York: New Directions, 1962), p. 208.

في روايته «Mount Analogue»، يقول رينيه دومال على لسان شخصية الأب (التي تشبه شخصية الفيلسوف جورج غوردجييف) إنه لا يمكننا أن نجمع في عقلنا أكثر من أربعة أشياء دفعة واحدة، ويذكر المثال التالي:

«1. أرتدي ملابسي لأخرج؛ 2. أخرج لأستقل القطار؛ 3. أستقل القطار لأذهب إلى عملي؛ 4. أذهب إلى عملي لأكسب عيشي...؛ حاول الآن أن تضيف خطوة خامسة، وأؤكد لك أن إحدى الخطوات الأولى ستتلاشى من ذهنك»[4].

يمكن تفسير كلمة «عدد» على أنها تعني «ما يُعَدُّ». والفكرة هنا هي أن تخصيص أعداد لأشياء في العالم يزيل الارتباك والإبهام ويستبدلها بحقيقة صلبة وثابتة. قد يشعر المثالي بالدهشة أمام إمكانية «تثبيت» العالم؛ هذا في حال اعتقد المرء أن العالم كله محض حلم، وهم، صورة في عقل ما... وإذا صدَّق المرء ذلك فعلاً، فمن الصعب تفسير الهوية بين الأعداد التي يستخلصها أشخاص مختلفون من العالم. إذا ذهبتُ إلى الغابة وعددتُ أغصان شجرة بلوط ما، وإذا فعلتَ أنت الأمر نفسه غداً، ستتفق أعدادنا بالتأكيد. كما يمكنك أن تسافر بعيداً عن منزلك، وعندما تعود ستجد منزلك ما زال السابع على اليمين. الطريقة الوحيدة لتفسير الهويات العددية بين العوالم التي يحلم بها كل منا، أن نكون -أنا وأنت- الشخص نفسه!

لكن سواء كنا الشخص نفسه أم لا، فما يزال عليَّ إكمال بقية هذا القسم، حتى أتمكن من قراءته -وأنا شخص آخر- وأن أعرف مفارقة بيري! الفكرة التي كنتُ أناقشها هي أننا نحصل على نوع من التماسك للعالم من خلال تعيين أعداد للأشياء. والطريقة التي نعيِّن بها مجموعات محددة هي عملية

4- Rene Daumal, *Mount Analogue* (San Francisco: City Lights Books, 1959), p. 63. في الواقع، تشير الاختبارات النفسية الحديثة إلى قدرة الإنسان على استيعاب ما يصل إلى سبعة أشياء دفعة واحدة في مجال وعيه. وكتاب Mount Analogue، بالرغم من أنه غير مكتمل، إلا أنه كان أحد مصادر إلهام روايتي White Light. ويتحدث الكتاب عن جبل غامض، وربما لانهائي، يوجد على الأرض، ولم يلاحظه أحد من قبل لأن الفضاء بالقرب منه منحنٍ لدرجة تجعله خفياً، حيث لا يرى من ينظر إليه إلا الفضاء حوله فحسب.

العَدِّ. ولتعلُّم العَدِّ، نحفظ خلال السنوات الأولى من الحياة سلسلة معيَّنة من الأصوات، حيث يشير كل صوت إلى عنصر واحد حين نقوم بعملية العَدِّ لمجموعة ما، ونستخدم الصوت الأخير كاسمٍ لحجم أو عدد عناصر المجموعة.

يمكن استخدام أي تسلسل سهل التذكُّر كقائمة للأعداد. استخدم اليونان أحرف أبجديتهم لترقيم الأشياء. إذا شئتَ يمكنك استخدام الأسماء في دفتر الهاتف الخاص بك، أو آيات الكتاب المقدس. في قصته «فيونز المُتذكِّر»[5]، يصف بورخيس شاباً يُصاب رأسه في حادث، فيصبح قادراً على تذكُّر كل شيء يمر أمام بصره كأنه آلة حفظ جبارة، حتى إنه تمكّن من اختراع اسم فريد عشوائي لكل عدد بدءاً من 1 حتى 24.000:

«بدلاً من سبعة آلاف وثلاثة عشر، سيقول –مثلاً– ماكسيمو بيريز؛ وبدلاً من سبعة آلاف وأربعة عشر، سيقول سكة القطار؛ وسيقول عن أعداد أخرى: لويس ميليان لافينور، أوليمار، كبريت، لِجام، حوت، غاز، مِرجل، نابليون، أوغسطين دي فيدا، حتى إنه قد يقول تسعة بدلاً من خمسمئة... حاولتُ أن أشرح له أن هذا اللحن المرتَجل من المصطلحات غير المتناسقة كانت بالضبط عكس نظام الأرقام. أخبرتُه أن قول 365، بمعنى ثلاث مئات وست عشرات وخمسة آحاد، هو تحليل غير موجود في الأرقام التي يخترعها مثل «تيموتيو الزنجي» أو «مفرط البدانة». لم يفهمني فيونز، أو رفض أن يفهمني»[6].

إن العيب في تسلسل العَدِّ الغريب، كما يشير بورخيس، ليس أنه صعب فحسب، بل لأنه لا يعتمد على نظام ينتج امتدادات لا تنتهي من الأسماء الجديدة.

أبسط نظام لتسمية الأعداد هو نظام العَدِّ. يقوم هذا النظام على تسمية العدد n وفق تسلسلٍ من دقّات n. بالتالي، اسم الرقم الذي نسمِّيه عادة 5 هو / / / / / ، أو دقَّة دقَّة دقَّة دقَّة دقَّة. أول عدد غير قابل للتسمية في نظام

5– *Funes the Memorious* by Jorge Luis Borges.

6– Rene Daumal, *Mount Analogue* (San Francisco: City Lights Books, 1959), p. 64.

العَدِّ بأقل من مليار كلمة هو دقَّة دقَّة دقَّة... دقَّة دقَّة دقَّة، حيث تركتُ فراغاً لـ 999.999.994 دقَّة ليبقى لي متسعاً في حياتي لفعل شيء آخر.

يعتمد نظام الأعداد المألوف على الأسماء المحفوظة للأعداد من 1 إلى 9، / / / / / / / / / ؛ ويعتمد نظام عبقري على قوى العشرة لأعداد أكبر. في الولايات المتحدة، يُسمَّى العدد الذي نكتبه كـ 1 متبوعاً بـ $(n+1)3$ من الأصفار على الشكل: «بادئة لاتينية تقابل n مع اللاحقة ليون». وبالتالي اسم العدد 1 متبوعاً بـ 12 صفراً هو تريليون، لأن $(3+1)3=12$ و3 باللاتينية هي (تري). يُسمَّى العدد 1 متبوعاً بـ 100 صفر «غوغول»، ويمكن أن يُدعى «عشرة دو-تريتنو»، لأن $(32+1)3+1=100$ والمقابل اللاتيني لاثنين وثلاثين هو دو-تريتنو. في الواقع، نادراً ما يستخدم المرء أسماء الأعداد الكبيرة. وتُقرأ الأعداد التي تزيد عن ثلاثين رقماً بسرد أرقامها مع فهم قيمة هذه الأرقام بالنسبة للنظام العشري.

يناسب استخدام الأُس في الترميز الإشارة إلى الأعداد الكبيرة، حيث يمكننا كتابة غوغول بالشكل 10^{100}، وبذلك يمكننا الانتقال بسهولة إلى غوغول بلكس، الذي يُكتب بالشكل 10^{google} أو $10^{10^{100}}$. ونلاحظ هنا أن غوغول بلكس غير قابل للتسمية بأقل من مليار كلمة إذا استخدمنا أسماء الأعداد «-ليون» العادية. من الواضح وجود بعض الأعداد القريبة من غوغول بلكس التي لا يمكن تسميتها بأي شكل أقصر من قراءة أرقامها. هذه الأعداد غير قابلة للتسمية فعلاً بالنسبة للإنسان، فالعدد الذي يتكون من غوغول رقماً تحتاج كتابته إلى أوراق يمكن أن تصل إلى أبعد نجم مرئي لنا، حيث أُقدِّر أننا إذا مددنا مسافة عشرة مليارات مكعبة من السنين الضوئية من الأوراق التي تحوي رقماً بعد رقم إلى أبعد نجم مرئي، فإنها ستحوي على 10^{62} فقط، أي أقل من غوغول 10^{100}.

كانت عملية تقدير هذه الأعداد الكبيرة العجيبة، وما زالت، هواية عريقة ونبيلة. كتبَ أرخميدس أطروحة تُدعى «العدَّاد الرملي»[7]، قدَّر فيها أنه يمكن لـ 10^{63} من حبات الرمل أن تملأ كرة يبلغ نصف قطرها المسافة من

7- *The sand Reckoner* by Archimedes.

الأرض إلى الشمس[8]. الأمر المهم في أطروحته أن اليونانيين لم يملكوا أي فكرة عن الأُس. بل كل ما كان لديهم هو فكرة ضرب عددين، وكان أكبر عدد مُسمًّى لديهم هو عشرة آلاف ($10^4 = 10.000$).

كيف تمكَّن أرخميدس من الوصول إلى 10^{63} إذاً؟ بدأ أرخميدس بوحدة بناء رئيسية هي M وتساوي «عشرةُ آلاف عشرةِ آلاف» (10^8). بعد ذلك، وبدون الاستخدام المباشر للأُسّ، قام بإيجاد أسماء للأعداد حتى $M^{M^2} = 10^{8.10^{16}}$. كانت حيلته في ذلك هي تقديم أعداد من الترتيب k^{th} من المرحلة j^{th}، حيث k و j أقل أو مساويين لـ M. إذا سمَّينا أكبر عدد من الترتيب k^{th} من المرحلة j^{th} العدد $A(k, j)$؛ عندها يمكن تلخيص بناء أرخميدس بأربع قواعد:

1) $A(1, 1) = M$

2) $A(1, j+1) = M. A(k, j)$

3) $A(k+1,1) = A(k, M)$

4) $A(k+1, j+1) = M. A(k+1, j)$

توجد طريقة أفضل من طريقة أرخميدس. كان يجب عليه أن يعتمد قاعدة أقوى من القاعدة 4 ولندعوها *4 حيث: *4)

$$A(k+1,j=1)=A(k+1,1).A(k+1,j)$$

كان أكبر عدد وصل إليه أرخميدس هو $A(M,M)$، وأسماه «المرحلة العشرةُ آلاف عشرةِ آلاف من الترتيب العشرة آلاف عشرة آلاف من الواحدة عشرة آلاف عشرة آلاف»، والذي نكتبه الآن $(M^M)^M = M^{(M^2)}$، وهو ناتج تكرار M عدداً من المرات يساوي M^2. ولو أن أرخميدس اعتمد القاعدة *4) بدلاً من 4)، لَوصل إلى العدد $A^*(M,M) = M^{(M^M)}$، وهو تكرار M عدداً من المرات يساوي M^M.

8- أُعيد نشر المقال في: J. Newman, ed., *The World of Mathematics, Vol. 1* (New York: Simon and Schuster, 1956), pp. 420-429.

$$\underbrace{\cdot M\cdot\ .\ .\ .\ \cdot M}$$
المرحلة Mth إلى $M^{(M^2)}$

$$\underbrace{M\cdot\ .\ .\ .\ \cdot M\cdot}$$
المرحلة الأولى إلى M^M

طريقة أرخميدس

$$\underbrace{M\cdot\ .\ .\ .\ \cdot M}\ .\ .\ .\ \underbrace{M\cdot\ .\ .\ .\ \cdot M}\ .\ .\ .\ \underbrace{M\cdot\ .\ .\ .\ \cdot M}\ .\ .\ .\ \underbrace{M\cdot\ .\ .\ .\ \cdot M}$$

المرحلة الأولى إلى M^M

المرحلة الثانية إلى $M^{(M^2)}$

المرحلة الثالثة إلى $M^{(M^3)}$

$\vdots$

المرحلة Mth إلى M^M

الطريقة البديلة لطريقة أرخميدس

قد يتساءل المرء إذا كان هناك أي حدٍّ للأعداد التي يمكننا وصفها انطلاقاً من M، بعملية الضرب والتكرار الأُسّي لـM. هناك نوع من عملية التكرار الأُسّي والتي تحدِّد ما يُسمَّى «تعميم أكرمان الأُسّي» $G(n, k, j)$ كما يلي:

1) $G(1, k, j) = j.\ k$

2) $G(n+1, 1, j) = j$

3) $G(n+1, k+1, j) = G(n, G(n+1, k, j), j)$

لا يبدو ذلك سيئاً أبداً، ولكن اتضح أن $G(2, k, j)$ هو العدد الذي نحصل عليه عن طريق ضرب j بنفسه عدداً من المرات يساوي k، وهو ما نكتبه j^k؛ وأن $G(3,k,j)$ هو العدد الذي نحصل عليه بتكرار العملية السابقة عدداً من المرات يساوي k، وهو «التكرار الأُسّي الثلاثي» لـj. ويمكننا تكرار العملية لنصل إلى التكرار الأُسّي الرباعي، وهكذا. لا بدّ أن العدد $G(M,M,M)$ سيكون عدداً طبيعياً هائلاً.

يوجد معيار رسمي محدد يعرِّف A كعدد مكرر مرة واحدة وG كعدد مكرر

مرتين. إن التابع $G(x, x, x)$ أكبر من أي تابع مكرر لمرة واحدة (يمكن العودة إلى قسم «الأعداد فوق المتنهية»). وبتكرارنا الأعداد أكثر من مرتين، ستنمو توابع الأعداد أمامنا بسرعة أكبر وسنصل لأسماء أعداد أكبر وأكبر. قد يبدو أن هناك حداً ما، عدد P أكبر من أي عدد $H(M,...,M)$، حيث H تابع لـ M أُثبت تعريفه بأكبر تكرار لـ M. والفكرة هنا أنه لا يمكن للمرء أن يصل على نحو منهجي إلى ما وراء P بدون استخدام عملية منهجية بأبعاد أكبر من M.

لا يستبعد ما قيل تواً إمكانية العثور على وصف قصير، لكنه غير منهجي، لعدد ما أكبر من P. في عام 1742، قدَّم كريستيان غولدباخ حدسية[9] يقول فيها إن كل عدد زوجي أكبر من 2 هو مجموع عددين أوليين. من غير المعروف ما إذا كانت حدسية غولدباخ صحيحة أم لا. بالفعل، يبدو أن كل الأعداد الزوجية الأكبر من 2 تُجمع من عددين أوليين: 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 20= 7+13, 84=23+61، وهكذا. ولكن ربما تفشل حدسية غولدباخ عند الأعداد الزوجية الكبيرة للغاية. وعندها، ربما يكون «أول عدد أكبر من 2 وليس مجموعاً لعددين أوليين» هو اسم عدد أكبر بكثير من P.

إن سلسلة الرموز $G(M,M,M)$ في حدِّ ذاتها ليست اسماً فعلياً. على الاسم أن يكون مكتفياً ذاتياً، ويحتوي على تعريفات لكل الرموز والكلمات التي يستخدمها. بالطبع سيحتوي اسم كهذا على عدد أكبر من الكلمات، ولكن الافتراض في نهاية المطاف أنه على أي وصف أن يُختزل إلى أبسط عبارة يمكن كتابتها. ليس من الصعب تخيل كيفية إكمال الاسم $G(M,M,M)$ بإضافة وصف لـ M بعملية ضرب أو تعميم أُسِّي أو غير ذلك. ونشير إلى هذا الاسم المُوسَّع بـ $[G(M,M,M)]$. الفكرة أن كتابة مثل هذا الاسم المُوسَّع تحتاج إلى عدد كبير من الصفحات. ويقدِّم هذا الوصف الكامل إمكانية معرفة اسم العدد الذي نتحدث عنه، إلى حدّ القدرة على التوصل إلى كتابة كل دقَّات العدد إذا كان الوقت مفتوحاً أمامنا.

9- الحدسية في الرياضيات هي فرضية يعجز الرياضيون عن تقديم أي برهان يؤكد صحتها أو دليل يثبت خطأها. وتوجد حدسيات رياضية شهيرة مثل حدسية كيبلر وحدسية ريمان وحدسية بوانكاريه. (المُترجِمة).

إن أسماء أعداد مثل [العدد الأولي ذو الترتيب غوغول] أو [$G(M,M,M)$] هي ما يمكننا تسميته «أسماء استنتاجية». وهناك نوع آخر من الأسماء مثل [أصغر عدد زوجي أكبر من 2 وليس مجموعاً لعددين أوليين]، و[العدد المثالي ذو الترتيب مليون]، و[العدد الأول n حيث تنتهي سلسلة من تكرار 7 عشرين مرة في الموضع ذو الترتيب n^{th} من الامتداد العشري للعدد π].

لا نعرف حالياً إن كانت أي من هذه الأسماء هي لأعداد فعلية، لأننا لا نعرف ما إذا هناك عدد زوجي أكبر من 2 وليس مجموعاً لعددين أوليين، ولا إذا كان هناك عدد مثالي[10] يحمل الترتيب مليون، أو إذا كان هناك أي سلسلة من تكرار 7 عشرين مرة في أي مكان من الامتداد العشري للعدد π. وتتضمن محاولة العثور على العدد الذي يحمل كل اسم من هذه الأسماء عملية بحث في جميع الأعداد حتى نعثر على العدد المنشود. ولكن، وفي كل حالة، قد يكون البحث غير مثمر، وإذا لم نعرف ذلك مسبقاً، سيستمر بحثنا إلى الأبد.

فهم الأسماء

بعد أن ناقشنا أنواعاً مختلفة من أسماء الأعداد، لنعُد إلى المفارقة التي بدأنا بها. من المفترض أن u_0 هو أول عدد لا يمكن وصفه بأقل من مليار كلمة. تبدو الطريقة الوحيدة لتجنُّب التناقض هي الافتراض أن u_0 ليس اسماً أو وصفاً لأي عدد. ربما يعود ذلك لاحتمالين: إما 1) أي عدد طبيعي سيكون قابلاً للوصف بأقل من مليار كلمة، أو 2) لا توجد طريقة لتوسيع وصفنا لـ u_0 لنصل إلى وصف كامل فعلاً يمكن أن يفهمه الجميع.

يبدو الاحتمال الأول غريباً بعض الشيء. والفكرة هنا أنه بالرغم من وجود عدد منتهٍ من الأسماء الأقل من مليار كلمة، فهناك عدد لانهائي من الطرق التي يمكن فيها استخراج هذه الأسماء. وبالنظر إلى الطبيعة المفتوحة للعقل واللغة، يمكن تفسير اسم واحد بعدة طرق. هذا الأمر في الواقع أقل

10- العدد المثالي هو العدد الذي يساوي مجموع قواسمه (باستثناء العدد نفسه) بما فيها الواحد. وأول عدد مثالي هو 6، حيث 1+2+3=6.

منطقية مما يبدو عليه. يلخِّص الاحتمال الأول القول إذا كان u_0 اسماً لعدد ما n، يجب أن يكون اسماً لعدد آخر $m>n$ أيضاً، حيث u_0 اسم لعدد لانهائي من الأعداد. ومبرر ذلك أن كل مرة من المرات اللانهائية التي نقول فيها «العدد الأول غير القابل للتسمية بأقل من مليار كلمة»، ستعني بـ «غير القابل للتسمية» شيئاً أكثر شمولية من قبل. وبكلمات أخرى، ستبدأ بالقول «u_0»، ثم تقول «لكن هذا لم يعُد عدداً غير قابل للتسمية لأني تمكنتُ من تسميته u_0، سأبحث الآن عن العدد الحقيقي غير القابل للتسمية»، فتصل إلى عدد أكبر، ثم تعيد ذلك مراراً وتكراراً إلى الأبد. يعني أننا إذا فكرنا في مفهوم التسمية بطرق أكثر تعقيداً إلى ما لانهاية، عندها سيكون الاسم u_0 في الواقع اسماً لكل من الأعداد الطبيعية!

تُستبعد هذه الطريقة في المراوغة حول مفارقة بيري معظم الأحيان بالاشتراط أن تُفسَّر أسماء الأعداد بطريقة واحدة ومحددة. في هذه الحالة، نحن مضطرون لقبول الاحتمال الثاني الذي يقول إنه لا توجد طريقة لشرح ما نعنيه بـ «قابل للتسمية بأقل من مليار كلمة» بأقل من مليار كلمة. أين تكمن الصعوبة بالضبط؟ ليست المشكلة في الحصول على قائمة تضمّ جميع التركيبات الممكنة لما يقلّ عن مليار كلمة. يمكننا القيام بذلك ميكانيكياً من حيث المبدأ. يمكن لآلة كبيرة بما فيه الكفاية أن تطبع بلا كلل كل هذه التركيبات بدون أية صعوبة على الإطلاق. وبافتراض أننا تقيَّدنا بالمليون كلمة التي تشكِّل اللغة الإنكليزية، سيوجد حوالي $10^{6billion}$ تركيب يتكون من أقل من مليار كلمة.

اسمحوا لي أن أذكِّركم أن المشكلة في تفسير عبارة «قابل للتسمية بأقل من مليار كلمة» ليست في إنتاج التركيبات الممكنة البالغ عددها $10^{6billion}$، والتي تشكِّل ما يمكن للمرء أن يستوعبه من كلمات في حياته كلها. بل المشكلة هي بالأحرى ما يلي: لا توجد طريقة لوصف إجراء عام (بأقل من مليار كلمة) يمكنه أن يترجم أي سلسلة من الكلمات (الأقل من مليار كلمة) إلى العدد الذي تصفه هذه الكلمات. وبعبارة أخرى، *ما من طريقة يمكن فيها للمرء أن يصف بشمولية كيفية انتقاله من الكلمات إلى الأفكار*.

لنفترض أن بإمكاننا التوصل إلى وصف نهائي لكيفية تحويل الكلمات

إلى أفكار، أو الأسماء إلى أعداد، ولندعُه «**تحويل**». وسيكون هذا الوصف دقيقاً لدرجة إمكانية تحويل أي تسلسل من الكلمات، بمجرد تطبيقه عليها، والخروج بالعدد الذي تصفه هذه الكلمات. ولنطبِّق الآن «**تحويل**» على وصف u_0 التالي: [أنتِج ميكانيكياً السلاسل المُحتمَلة الأقل من مليار كلمة إنكليزية. طبِّق «**تحويل**» على كل سلسلة بدورها، وأنتِج قائمة بالأعداد الناتجة عن كل تحويل. العدد u_0 هو العدد الأول غير الموجود في هذه القائمة].

إن الوصف الموجود بين قوسين، ولندعُه [تحويل- u_0]، له الطول نفسه للعملية «**تحويل**»؛ فإذا تمكنّا من وصف «**تحويل**» بأقل من مليار كلمة، فإن [تحويل- u_0] أقل من مليار كلمة أيضاً، مما يعطينا استنتاجاً مرفوضاً بأن u_0 قابل للوصف بأقل من مليار كلمة. لذا يجب أن نستنتج أن أي «تحويل» أقل من مليار كلمة، سيكون غير قادر على تقديم وصف شامل أو منهجي لكيفية فهم كل عبارة إنكليزية أقصر من مليار كلمة. وباختصار، لا يمكن للوصف أن يكون أقل من الموصوف[11].

لعل عبارة من مليار كلمة أكبر من أن تكون ذات معنى. لنخفِّض العدد إلى 200.000 كلمة، وتعادل عدد صفحات كتاب يضمّ حوالي 800 صفحة. اكتشفنا أنه ما من برنامج بطول كتاب يمكِّن الحاسوب من فهم كل الكتب. حتى إن كتابة برنامج من ملاحظات موجزة تقدِّم إجابات واضحة لكل سؤال يمكن أن يُطرح عن كل كتاب، ستحتاج حجماً يتجاوز حدود المجرة. لكن الحقيقة المثيرة للاهتمام التي تعلمناها من مفارقة بيري، أنه لا يمكن أبداً لأي نوع من البرامج أن يعطينا وصفاً قصيراً منطقياً لكيفية فهم اللغة.

ربما لم يكن وصف لودفيغ فيتغنشتاين[12] ساخراً كثيراً في فلسفة «اللغة العادية»، عندما قال إن كلام الناس مع بعضهم البعض لا يعدو كونه لعبة من

11- بالمعنى الدقيق للكلمة، أظهرنا أنه لا يمكن وصف Trans بأقل من مليار كلمة ينقص منها K، وK هو الثابت الصغير تقريباً الذي نحتاجه لتحويل وصف Trans إلى وصف u_0–Trans. وقد يكون K يساوي 1000 تقريباً.

12- لودفيغ فيتغنشتاين (1889، 1951)، أحد أكبر فلاسفة القرن العشرين، ولد في النمسا ودرَّس في جامعة كامبردج في إنكلترا. شمل عمله المنطق والفلسفة والرياضيات وفلسفة اللغة. (المُترجِمة).

الأصوات فحسب. ولكن إذا كان من المستحيل، من حيث المبدأ، على أي شخص صياغة مجموعة كاملة من القواعد لكيفية استخدام اللغة، فكيف يمكن التأكيد على أن تعلم اللغة هو مجرد عملية تعلم لعبة معيَّنة وفق قواعد معيَّنة؟ وللتعبير عن هذه الفكرة بأسلوب فيتغنشتاين نقول: إذا كانت اللغة مجرد لعبة تتبع بعض القواعد، فَلِمَ لا يمكن لأحد أن يخبرنا ما هي هذه القواعد؟

تبدو نظرة فيتغنشتاين السابقة للغة مقبولة[13]. وفقاً لـ «نظرية الصورة للغة» هذه، توجد علاقات معيَّنة بين المفاهيم والأشياء التي ندركها في الكون الفيزيائي والعقلي من حولنا. ومن أجل توجيه هذه السمات بعضها إلى بعض، نستخدم الكلمات لإعداد البُنى اللغوية التي تقابلها أو تشكِّلها بطريقة أو بأخرى. إنِ مثل هذه النظرة للغة، والتي تعتمد على مفهوم «الحقيقة» الخارجي والموضوعي ولكن غير القابل للتعريف، من أكثر وجهات النظر قبولاً لأن اللغة فيها تعمل من خلال نظام منطقي قابل للتصور.

يمكنني هنا إعطاء وصف أكثر دقة لما تخبرنا به مفارقة بيري عن أجهزة الحاسوب الرقمية. وسأقدِّم تفسير غريغوري تشايتين[14] لنظرية المعلومات

13- يُقصد بالعمل المبكر لـ فيتغنشتاين *Tractatus Logico-Philosophicus* (London: Routledge and Kegan Paul, 1961). أما العمل المتأخر فهو: *Philosophical Investigations* (Oxford: Blackwell, 1953). ظهر العمل المبكر عام 1921، وكان العمل الوحيد الذي نُشر خلال حياة فيتغنشتاين (1889-1951). ومن الأعمال التي نُشرت بعد وفاته، والتي لم تكن مصقولة مثل عمله المتأخر، كتاب: *Remarks on the foundations of Mathematics* (Oxford: Blackwell, 1956). وأحد أكثر المقاطع غرابة في هذا الكتاب هو المقطع الموجود على الصفحات (49-63)، وفيه يهاجم فيتغنشتاين -إلى حدٍّ ما- نظرية غودل ونظرية كانتور، كونه من أنصار النهاية، زاعماً أنها غير مفهومة من الأساس! توجد عدة مقالات عميقة حول هذا الكتاب في: Benacerraf and Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964).

14- غريغوري تشايتين، عالم رياضيات وحاسوب أرجنتيني أمريكي. قدَّم مساهمات كبيرة في نظرية المعلومات وما وراء الرياضيات، ويُعتبر أحد مؤسسي ما يُعرف اليوم بـ «تعقيد كولموغوروف» جنباً إلى جنب مع أندريه كولموغوروف وراي سولومونوف. (المُترجِمة).

لمفارقة بيري[15]. ليكن لدينا الحاسوب M المتصل بآلة كاتبة *IBM*، حيث يمكننا التفكير في أي سلسلة من الرموز التي تُكتب على لوحة المفاتيح على أنها البرنامج P. نقول إن P هو اسم M للعدد n إذا نتج عن عملية كتابة P على الحاسوب M طباعة العدد n فقط.

يتحدّد طول البرنامج P بعدد الضربات على لوحة المفاتيح اللازمة لإدخال P. ونحدد التعقيد النظري للمعلومات للعدد n على الحاسوب M بالعدد $I_{(M)}n$، الذي يساوي أقصر طول لـP ينتج عنه n. وليس من الصعب ملاحظة أن العدد $I_{(M)}n$ لن يكون أطول من العدد n. فمثلاً إذا قمنا بكتابة «البرنامج» (252525252525252525252525) ستطبع الطابعة العدد (252525252525252525252525). مع ذلك، هناك طريقة أقصر لكتابة هذا العدد، فالبرنامج «اطبع 25 لـ 12 مرة وتوقف» يتطلب عدد ضربات أقل على لوحة المفاتيح من الطريقة السابقة. ولمثال أكثر تطرفاً، لكتابة اسم العدد 10^{1000} اعتماداً على التدوين العشري، نحتاج 1001 ضربة على لوحة المفاتيح. أو يمكننا استخدام الرمز «*» في البرنامج على أنه أُس، وببساطة نكتب 1000*10 فتطبع الطابعة 1001 رقماً ثم تتوقف.

والآن ليكن البرنامج R، وهو «اطبع العدد الأول الذي لا يمكن للحاسوب M تسميته بشكل أقصر من هذا البرنامج». لا نعتقد أن الحاسوب M مُنح معرفة ذاتية، لذا يجب تعريف عبارة «يمكن للحاسوب M تسميته» على نحو واضح. ويمكن حلّ ذلك بإعطاء الحاسوب قائمة من القواعد التي تمكِّنه من محاكاة سلوكه الخاص. بعد ذلك، يمكن إيجاد بعض الأعداد مثل r (10*10 مثلاً) أقصر من البرنامج R، حيث R هو البرنامج «قُم بمحاكاة الحاسوب M الذي يعمل على النحو التالي: [نضع هنا وصف الحاسوب M]. اطبع العدد الأول الأقصر من r والذي لا يمكن للحاسوب M تسميته».

15- Gregory Chaitin, «Randomness and Mathematical Proof», *Scientific American* (May, 1975), pp. 47-52. انظر أيضاً: Chaitin's colleague at the T. J. Watson Research Center of IBM, Charles Bennett, *«Mathematical Games» Scientific American* (November, 1979), pp. 20-34. كلا المقالتين تتعلق بالحقل الجديد «نظرية المعلومات الخوارزمية».

بما أن البرنامج أقصر من r، سيفشل الحاسوب M في تسمية أي عدد، وإلا سيحدث تناقض. ولكن كيف يمكن لبرنامج محدَّد مثل R أن يفشل في تسمية عدد؟ إن أي شخص حاول برمجة حاسوب يعرف ظواهر التكرار والبحث اللانهائي. تتسبب بعض البرامج في دخول الحاسوب في حلقة لانهائية، بدون إخراج أي نتيجة؛ ستؤدي برامج أخرى إلى إخراج سلسلة لانهائية من الأعداد. وعندما تدخل الآلة إحدى هاتين الحالتين، ستستمر بالعمل إلى الأبد إذا لم يوقفها عامل خارجي.

الحالة الأولى:

#1: انتقل إلى #2

#2: انتقل إلى #1

النتيجة: حلقة لانهائية

الحالة الثانية:

إذا $n=n$، اطبع n

إذا $n\neq n$، توقف

النتيجة: بحث لانهائي

إذا أُدخل البرنامج R في الحاسوب M، سيستمر M بالعمل إلى الأبد ولن يصل إلى أي نتيجة. ولكن لِمَ ذلك؟ دعونا نكتشف أين الحلقة أو البحث اللانهائي في خطوات البرنامج R.

عندما يبدأ الحاسوب M بتنفيذ البرنامج R، فسيقوم بالخطوات التالية:

1) اصنع قائمة بكل البرامج المُحتمَلة ذات الطول r؛
2) لكل برنامج P من هذا النوع، قُم بمحاكاة لحركة M على P؛
3) إذا كانت مخرجات عمل M وفق البرنامج P هي n، فضع n في المجموعة S؛
4) ليكن $u_0(M)$ العدد الأول الذي ليس في المجموعة S.

نحن نعلم مسبقاً أن هذا الإجراء لا يمكن أن ينتهي أبداً، أين تختبئ الحلقة أو البحث اللانهائي إذاً؟ إنها تكمن في ترجمة الخطوة 2، لأن أحد

البرامج ذات الطول الأقصر من r سيكون البرنامج R، وعندما سيحاول الحاسوب M أن يحاكي سلوكه الخاص على R، فيجب عليه أن يفعل ذلك عبر الخطوات من 1 إلى 4 وفق البرنامج R، والذي سيقود بدوره إلى محاكاة المحاكاة، ثم محاكاة محاكاة المحاكاة... وهكذا إلى اللانهاية.

يبدو الأمر كأن الآلة المسكينة تحاول اختراق الوعي الذاتي الكامل بهذا النكوص اللانهائي من المحاكاة الذاتية. هناك طريقة أخرى للنظر إلى هذه المشكلة، وهي القول إن M لا يمكنها أن تثبت وجود أي أعداد n ذات التعقيد $I_{(M)}n>r$. وإن r تعادل تقريباً تعقيد وصف M، لذا يمكن القول إن M غير قادرة على إثبات وجود أي أعداد ذات تعقيد نظري للمعلومات أكبر بكثير من M نفسها.

استخدمتُ $u_0(M)$ أعلاه للدلالة على العدد الأول ذي التعقيد الأكبر من r. ولنستخدم $W(M)$ للدلالة على العدد الأول الأكبر من أي عدد أقل تعقيداً من r، وهو العدد الأكبر من أي عدد يمكن للحاسوب M أن يخرجه على أساس عدد دقّات أقل من r، حيث نختار r على أنه أكبر تعقيداً من M. الآن، إذا فكرنا بمخرجات M على أنها عدد الثواني التي يحتاجها الحاسوب قبل نهاية الإجراء وتوقفه بدلاً من العدد n الذي يُطبع، سنجد أنفسنا في وضع مثير للاهتمام. إن أي تعليمات يمكن أن ندخلها في M ستكون أقل تعقيداً من M، لذا ستكون مخرجات M في أي حالة أقل من العدد $W(M)$. وإذا فكرنا، كما ذكرنا سابقاً، بمخرجات M على أنها وقت تنفيذ الإجراء، عندها نستنتج أن أية تعليمات أقل تعقيداً من M ستتسبب بقيام M بأحد أمرين: إمَّا العمل لوقت أقل من $W(M)$، أو الاستمرار بالعمل إلى الأبد.

تظهر لنا، بعيداً عن كل المصطلحات الفنية، حقيقة غريبة للغاية. بافتراض أن هناك حداً أقصى لتعقيد الآلات التي يمكننا تصنيعها، فعلى أي آلة إمَّا أن تتوقف عند عدد محدود من الثواني، أو تستمر بالعمل إلى الأبد. يبدو الأمر كما لو أنه توجد في المستقبل أماكن معيَّنة لا يمكننا الوصول إليها بالكامل.

دعونا نضيف المزيد من المتعة على هذه المشكلة. لنتخيل أن الوقت سيستمر بدون حدّ وأنك ستقوم ببناء آلة زمن تمكِّنك من الذهاب إلى

المستقبل إلى أي يوم D تحدِّده للآلة. سيكون هناك يوم ما D_w الذي ستدخلك أي محاولة للذهاب إلى ما قبله في استمرارية لانهائية لعمل الآلة لتعيد أخذك مرات لانهاية لها إلى المستقبل. وتكمن المشكلة في أنه لا يمكنك بأي حال من الأحوال أن تتصور أي عدد منتهٍ من الأيام التي تكفي للوصول إلى ما يسبق D_w.

إذا لم تعجبك فكرة آلة الزمن، فكِّر في الأمر من ناحية القنابل الموقوتة. هناك تاريخ مستقبلي معين يمكن بعده أن نؤكد عدم وجود أي قنبلة موقوتة أنشئت قبل عام 2000 يمكن أن تنفجر، بافتراض أن جهاز توقيت القنبلة لا يتعطل[16].

لنعُد الآن إلى مفارقة بيري بالنسبة للإنسان بدلاً من الحواسب الرقمية. أحد الاختلافات الواضحة بين الاثنين هي أن الإنسان يملك نوعاً محدداً من المعرفة الذاتية لا تملكه الآلات. لكن هل نحن أفضل حالاً بالفعل بدون هذه المعرفة؟ ألا نواجه النكوص نفسه الذي يصيب الحاسوب M عندما نحاول فهم المقصود بـ u_0، العدد الأول الذي لا يمكننا تسميته؟ فنحن في محاولتنا لإيجاد العدد اللامُسمَّى، يجب أن نعرف كل أسماء الأعداد، ثم نأخذ أول عدد بدون اسم؛ ولمعرفة أول عدد بدون اسم علينا تحديد ما ينطبق عليه هذا العدد، وبالتالي معرفة اسمه، أليس كذلك؟

إحدى طرق الخروج من هذا النكوص هي اعتبار اسم مثل u_0 اسماً ثانوياً، حيث توجد جميع الأعداد القابلة للتسمية (بأقل من مليون كلمة مثلاً) بدون استخدام مفهوم الاسم الثانوي مثل «قابل للتسمية»؛ ثم سيكون هناك أعداد قابلة للتسمية ثانوية، مثل $G(u_0, u_0, u_0)$، ووراء كل ذلك سيوجد u_1، وهو أول عدد غير قابل للتسمية باستخدام المفاهيم الثانوية، إلى آخره. لكن

16- نحتاج مفارقة بيري لإثبات هذه النتائج لآلات التحويل. مثلاً، أجهزة الحاسوب ذات الذاكرة اللانهائية. كما تثبت حجة أبسط بكثير النتائج نفسها لآلات محدودة. مثلاً، أجهزة الحاسوب ذات الذاكرة الثابتة والمحدودة. انظر: Marvin Minsky, *Computation: Finite and Infinite Machines* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1967).

هذه الطريقة النظرية للخروج من مفارقة بيري ليست مرضية فعلاً، لأننا نقول فيها: «انظر، u_0 يعني العدد الأول غير القابل للتسمية بأقل من مليون كلمة بأي وسيلة على الإطلاق، ويشمل هذا كل ترتيب يمكنك اختراعه في اللغة بأقل من مليون كلمة».

يمثِّل الشكل 46 وجهة النظر القاطعة هذه. جميع الأعداد المحاطة بدائرة هي أعداد قابلة للتسمية، والعدد u_0 هو أول عدد غير قابل لذلك. توجد غالباً أعداد قابلة للتسمية أبعد من المستقيم في الشكل.

الشكل 46

على سبيل المثال، قد يكون «أكبر عدد مثالي» اسماً لعدد كبير للغاية $P > u_0$، وبعد ذلك سيكون لدينا الأعداد $P+n$ و$P-n$ يمكن تسميتها أيضاً، حيث الأعداد n ذات أسماء ليست قريبة جداً من الحدّ الأقصى للكلمات. في نهاية المطاف، ستنفذ كل الأسماء وسنحصل على العدد W الأكبر من أي عدد قابل للتسمية بأقل عدد محدّد من الكلمات.

لتجنُّب المفارقة، على المرء أن يقبل حقيقة أن الأسماء u_0 وW ليست في الحقيقة أسماء. وأن مفهوم «قابلية التسمية» هو بحد ذاته غير قابل للتسمية في الحقيقة؛ فالحروف (ق-ا-ب-ل-ل-ت-س-م-ي-ة) تشير إلى المفهوم، لكنها لا تصل إليه حقاً. وبالمعنى نفسه، يُستخدم الرمز Ω، أوميغا الكبيرة، للدلالة على اللانهاية المطلقة، لكنه لا يعنيه حقاً. وتماماً كما تكمن اللانهاية المطلقة وراء أي وصف ممكن، فإن مفهوم قابلية التسمية خلال عمر إنسان تكمن وراء أي وصف عقلاني بشري.

هل هذا هو الحل النهائي لمفارقة بيري؟ ليس فعلاً. ما تزال المشكلة الأساسية قائمة في كيفية إيجاد معنى للعبارة «قابلية التسمية هي مفهوم غير قابل للتسمية»، بالرغم من أن موضوع العبارة كلمةٌ لا يمكن أن تشير إلى أي مفهوم قابل للاستيعاب. من الغريب والمثير للاهتمام التحدث عن أشياء من المفترض أنه لا يمكننا الحديث عنها!

يمكننا أن نخلص إلى استنتاج مفاده أنه يوجد نمطان مميزان من الوعي: الوعي المنتهي والوعي اللامنتهي. طالما أن هويتي هي جسدي وذهني العقلاني، لا يمكنني أن أتصور العدد u_0 الخاص بي؛ لكنه لن يكون أمراً صعباً إذا طابقت هويتي **المطلق**. لا يقود ذلك إلى النكوص النظري الذي وجدناه سابقاً، لأن المرء الذي يتطابق مع **المطلق** يكون في وضع يمكّنه من «تسمية» كل الأعداد الطبيعية دفعة واحدة.

الأعداد الحقيقية العشوائية

إن كل عدد حقيقي r يرمز من حيث المبدأ إلى كمية محددة من المعلومات: السلسلة المنتهية من الأرقام في الامتداد العشري لـr. وعملياً، تتحدد فعلياً جميع الأعداد الحقيقية التي نتعامل معها بكمية محددة من المعلومات. وأسماء الأعداد مثل$2/7$، $\sqrt{13}$، π^2، $cos3$، $log_{10} 387$، هي في الحقيقة مجموعات مدمجة ومُنمَّطة من الإرشادات لتوليد الامتداد العشري اللامنتهي للعدد المقصود.

لنعتمد القول إن العدد الحقيقي عشوائي إذا احتوى على كمية لانهائية من المعلومات. أي إن تسلسل الأرقام المكوِّنة له عشوائي إذا لم توجد طريقة محددة لتوصيفه، أو أي إجراء محدد يمكن استخدامه لتوليد العدد رقماً بعد رقم. في الواقع، عادة ما تُستخدم كلمة «عشوائي» للأعداد الحقيقية التي تخضع لبعض الشروط الإضافية المتعلقة بفكرة «على كل تتابع قابل للتسمية لتسلسل عشوائي أن يكون عشوائياً أيضاً»[17]. لكن لنقاشنا هنا يكفي أن نساوي بين العشوائية وعدم قابلية التسمية.

يضمّ القسم الفرعي «بناء الأعداد الحقيقية» تطوراً تاريخياً لأنواع مختلفة من أسماء الأعداد الحقيقية المستخدَمة، مع التركيز على نحو خاص على الأساليب اليونانية لبناء الأعداد الحقيقية. ويقدِّم القسم الفرعي «مكتبة بابل»

17- إذا اعتبرنا أن الأرقام المتعاقبة لمتالية هي كما تظهر على عجلة الحظ ذات الفتحات العشر، فإن المتالية العشوائية الإحصائية واحدة لأنه التي لا توجد فيها «استراتيجية فوز» محددة تضمن الفوز بأكثر من عُشر الوقت. انظر: Richard Von Mises, *Probability, Statistics and Truth* (Hilda Geiringer, trans., New York: Macmillan, 1957).

تحليلاً لفكرة المكتبة الشاملة التي تحتوي كل الكتب الممكنة. وفي القسم الفرعي التقني إلى حدٍّ ما، «مفارقة ريتشارد»، نبحث في البنية التي اكتشفها جوليس ريتشارد. يبدو أن هذه البنية تنتج عدداً حقيقياً عشوائياً عن طريق التقسيم على مجموعة من الأعداد الحقيقية التي تحمل أسماء موجودة في المكتبة الشاملة؛ تثير هذه الفكرة قضايا مشابهة للقضايا التي طرحتها مفارقة بيري. وفي القسم الفرعي الأخير، «ترميز العالم»، نبحث في مسألة الوجود المادي للأعداد الحقيقية العشوائية.

بناء الأعداد الحقيقية

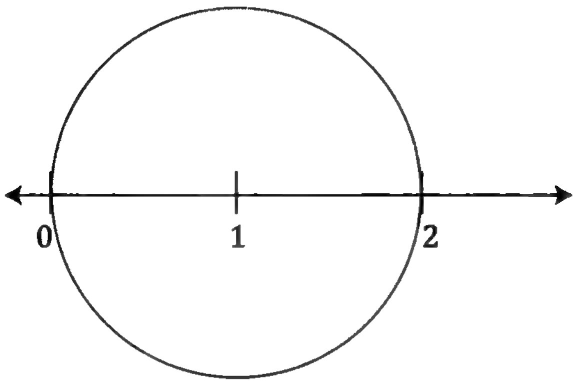
في هذا القسم، سنفكر في الأعداد الحقيقية كنقاط على مستقيم مستمر مثالي. نأخذ النقطتين 0 و1 على المستقيم عشوائياً، وبعد ذلك يصبح الارتباط بين الأعداد الحقيقية والنقاط على المستقيم تلقائياً إلى حدٍّ ما.

يُمثَّل العدد حقيقي عادة كامتداد عشري لا محدود، ويمكننا النظر إليه كوصف لإجراء لا محدود لتوضيع نقطة معينة (أو حيِّز لانهائي في الصِّغَر) على مستقيم الأعداد. إذا سمحنا لأنفسنا باستخدام منحنيات ومساحات قياسية مختلفة، فهناك العديد من الأعداد الحقيقية التي تملك إجراءً محدداً لتوضيع النقطة الموافقة لها على مستقيم الأعداد.

لنفترض أن لدينا فرجاراً، يمكننا العثور على النقطة المُسمَّاة 2 خلال لحظات عن طريق رسم دائرة مركزها النقطة 1 ونصف قطرها يساوي المسافة بين 0 و1. يجب الإشارة إلى أن الرسم المثالي لهذه الدائرة من الناحية العملية سيكون عملية لانهائية. فحتى إن اعتبرنا أن الخطوط المرسومة لا تملك أي سماكة وأن إبرة الفرجار وقلمه عبارة عن نقطتين، ستبقى مشكلة وضع إبرة الفرجار في النقطة 1 تماماً وتدبُّر وضع القلم على النقطة 0 تماماً. بالفعل، إن مطابقة نقطتين هي عملية لانهائية من المحاولة المستمرة لتقليل الخطأ. ولتجنُّب هذا الاعتراض على دقة بناء النقطة 2، سنفترض أن الدوائر المثالية ذات المراكز والأقطار الدقيقة تظهر إلى الوجود كما تظهر الخطوط المستقيمة المثالية التي تمرّ عبر نقطتين.

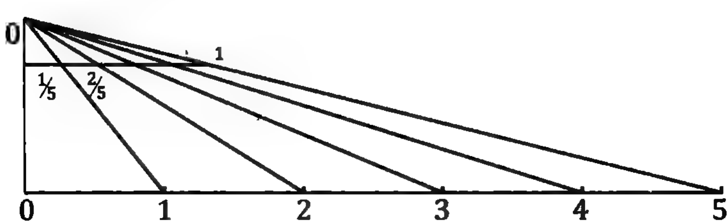
هذا هو محتوى فرضيتي إقليدس الثالثة والأولى، والتي لا تذكر في الواقع «المساطر والفراجير».

ثمرة ما سبق أن بإمكاننا تحديد موضع النقطة الموافقة للعدد الحقيقي 2، عن طريق النقطتين 0 و1، بدقة لانهائية في فترة زمنية نهائية. وينطبق الأمر نفسه على أي عدد حقيقي منتهٍ أو متكرر، لأن هذه الأعداد منطقية، ويمكننا العثور على كل نقطة منطقية على مستقيم الأعداد باستخدام فرجار.



الشكل 47

على سبيل المثال، سأبين طريقة بناء النقطة الموافقة للعدد الحقيقي 2.4000، وهو العدد ⅖ 2 نفسه. إن جوهر البناء هو إيجاد طول القطعة المستقيمة ⅖. يوجد حل ذلك في الشكل 48، حيث نستخدم تشابه المثلثات لتقسيم مسافة مُعطاة إلى خمس قطع متساوية (في حالتنا المسافة بين 0 و1).

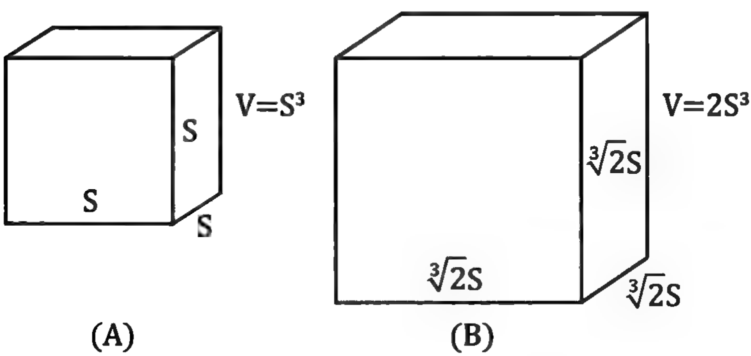


الشكل 48

يساعدنا استخدام المسطرة والفرجار على بناء أي عدد منطقي، وحتى أي عدد يمكن الحصول عليه كناتج لعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والجذور التربيعية على الأعداد المنطقية. (يمكنكم العودة إلى القسم «من الفيثاغورية إلى الكانتورية» حيث ذكرتُ كيفية الحصول على الجذور التربيعية باستخدام المسطرة والفرجار.) إذاً، يمكن إيجاد النقطة الموافقة لـ $\frac{\sqrt{3+\sqrt{21}}}{308}$، أو $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$ بدقة لانهائية في زمن محدد إذا اعتبرنا أن بإمكاننا رسم الدوائر والمستقيمات المثالية.

تتساءل المشاكل الثلاث الشهيرة في العصور القديمة عن إمكانيات عملية الإنشاء بالفرجار والمسطرة[18]. هذه المشاكل هي: مضاعفة مكعب (إنشاء مكعب حجمه ضعف حجم مكعب ما)، وتثليث زاوية (تقسيم زاوية ما إلى ثلاثة أقسام متساوية)، وتربيع دائرة (رسم مربع مساحته تساوي مساحة دائرة ما). سنركِّز هنا على المشكلتين الأولى والثالثة.

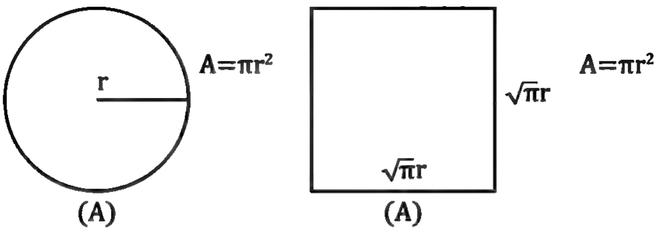
في مشكلة مضاعفة مكعب، نريد أن ننشئ مكعباً حجمه ضعف حجم مكعب مُعطى. وليس من الصعب ملاحظة أن ذلك يعادل إيجاد طريقة محدّدة لتوضيع نقطة على مستقيم الأعداد توافق العدد الحقيقي $\sqrt[3]{2}$.



الشكل 49

18- إنشاءات الفرجار والمسطرة هي مجموعة مسائل قديمة في الهندسة المستوية يُشترط فيها إنشاء أطوال أو زوايا معينة باستخدام الفرجار والمسطرة فحسب. (المترجمة).

مشكلة تربيع دائرة تتضمن إنشاء مربع بمساحة تساوي مساحة دائرة مُعطاة. ويعادل ذلك إيجاد طريقة محدّدة لتوضيع النقطة الموافقة للعدد الحقيقي $\sqrt{\pi}$ على مستقيم الأعداد، أو الموافقة لـπ، بما أن التربيع والجذر التربيعي ممكن التحديد بواسطة الفرجار والمسطرة.



الشكل 50

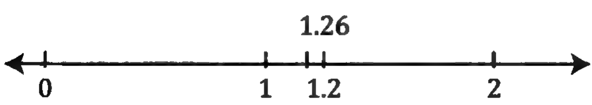
يميل المرء المُعتاد على النظرية الحديثة للأعداد الحقيقية إلى التفكير بأن مجرد كتابة وفهم الرمز $\sqrt[3]{2}$ يحلُّ مشكلة مضاعفة مكعب. لأننا عندما نفهم أن هذا الرمز يعني «العدد الحقيقي الذي مكعبه يساوي 2»، يمكننا تحديد الامتداد العشري له رقماً بعد رقم.

$1^3<2^3$ إذاً $\sqrt[3]{2}$ يبدأ بـ 1

$1.2^3<2<1.3^3$ إذاً $\sqrt[3]{2}$ يبدأ بـ 1.2

$1.26^3<2<1.27^3$ إذاً $\sqrt[3]{2}$ يبدأ بـ 1.26

يمكن تحديد كل نقطة موافقة لكل قطعة أولية من الامتداد العشري للعدد $\sqrt[3]{2}$، وبعد زمن لانهائي سنصل إلى النقطة النهائية التي تمثِّل هذا العدد.



الشكل 51

لكن اليونانيين لم يعرفوا ذلك. لكنهم كانوا مدركين تماماً أن بإمكان المرء إيجاد نقاط تقترب أكثر فأكثر من موضع $\sqrt[3]{2}$ على مستقيم الأعداد، أو يمكن إيجاد مكعب رخامي يقترب وزنه من ضعفي وزن المكعب الأصلي.

تمكِّننا عملية التجربة والخطأ من الاقتراب أكثر فأكثر من إيجاد مقدار مستمر ذي خصائص محددة. وتؤكد مسلَّمة الاستمرارية (التي قدَّمها ريتشارد ديديكايند لأول مرة على نحو صريح) على وجود مقدار واحد صحيح كحل لأي عملية من هذا النوع. وفي عصرنا الحديث، وجدنا أن تحديد المقادير المستمرة بعملية كهذه أمر ملائم بالفعل، أي تمثيل مقدار مستمر معين بعملية التجربة والخطأ والمرمَّز بامتداد عشري للعدد الحقيقي الموافق.

لكن عندما طرح اليونانيون مشكلة مضاعفة مكعب، أرادوا بذلك الوصول إلى طريقة منتهية لإنشاء قطعة مستقيمة بطول مساوٍ بالضبط لـ $\sqrt[3]{2}$. كانوا مرتابين من العمليات اللانهائية، فما من عملية لانهائية يمكن اعتبارها كاملة على نحو شرعي، وفي غياب عملية إنشاء منتهية لموضع النقطة $\sqrt[3]{2}$ على مستقيم الأعداد، تساءلوا إن كان مثل هذا الموضع الدقيق تماماً موجوداً فعلاً.

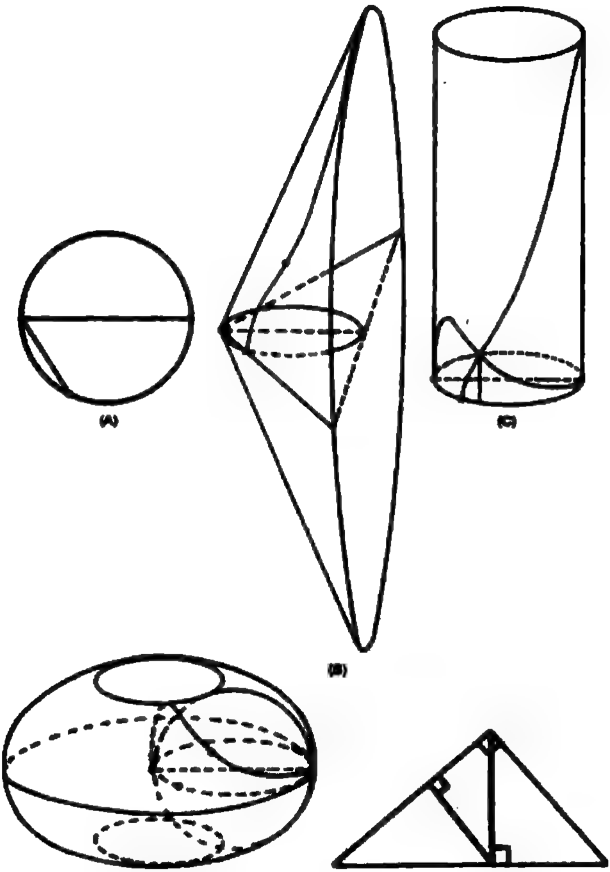
كان أول من توصَّل إلى طريقة نهائية لبناء موضع $\sqrt[3]{2}$ هو «أرخيتاس»، الذي كان فيثاغورياً وصديقاً لأفلاطون، ويُقال إنه حال دون قتل ديونيسوس لأفلاطون. ويرجع الفضل إليه أيضاً، قبل أرسطو، في اختراع نموذج لطائر يطير ونوع من خُشخيشة الأطفال، وكل ذلك في القرن الرابع قبل الميلاد.

تنطوي طريقة أرخيتاس لإيجاد الجذر التكعيبي لـ 2 على النظر إلى نقطة تقاطع حلقة وأسطوانة ومخروط. نبدأ بدائرة قطرها $OC=2$ كما في الشكل $52-A$. نوجد على هذه الدائرة النقطة B حيث يكون طول الوتر $OB=1$.

نقوم بتوليد حلقة بتدوير الدائرة حول خط يمرّ من 0 وعمودي على OC. ونولِّد الأسطوانة بتحريك الدائرة عمودياً على نفسها. أمَّا المخروط، فنولِّده بتمديد الوتر OB حتى يتقاطع مع الخط المار من C والعمودي على OC، وبعد ذلك نقوم بتدوير المثلث الذي تشكَّل حول هذا الخط.

إذا وُضعت الأسطح الثلاثة بما يجعل الدوائر الأصلية تتطابق مع بعضها البعض، سنحصل على نقطة تتقاطع فيها الأسطح الثلاثة، ولتكن P. وفي أسفل P مباشرة سنجد النقطة X على الدائرة الأصلية، حيث تكون المسافة

OX مساوية لـ $\sqrt[3]{2}$. ولأجل تصور مكان النقطة P، قمتُ برسم منحنيات على الأسطوانة في مكان تقاطعها مع الحلقة والمخروط. تقع النقطة P عند تقاطع هذين المنحنيين.



الشكل 52

السبب في أن $OX = \sqrt[3]{2}$ هو أن هذا الإنشاء الخاص يعطي مثلثاً قائماً من النوع الموضَّح في الشكل E–52. ولأن جميع المثلثات في هذا الشكل متشابهة، نحصل على التناسب المستمر (حيث تكون النسبة بين الطولين

الأول والثاني مساوية للنسبة بين الطولين الثاني والثالث) الذي يعطينا حلّ مشكلة مضاعفة المكعب.

ظهرت مشكلة مضاعفة مكعب لأول مرة في جزيرة ديلوس اليونانية، عندما تنبأ الكهنة أن البلاء الذي أصاب الجزيرة لن يُرفع عنها إلا إذا ضاعفوا حجم مذبح المعبد. كان سكان الجزيرة أذكياء بما فيه الكفاية ليدركوا أن حجم أي كائن ثلاثي الأبعاد يتضاعف إذا زاد كل من أبعاده بعامل $\sqrt[3]{2}$، وحينها عُرفت مشكلة مضاعفة مكعب.

أدرك اليونانيون أن المسطرة والفرجار غير كافيين لإنشاء الجذور التكعيبية، فكل الحلول المسجَّلة لمشكلة مضاعفة مكعب تنطوي على نوع من المنحنيات أو السطوح ذات الرتبة الأعلى. وتظهر المجموعة الكاملة لهذه الحلول في كتاب توماس ل. هيث الكلاسيكي «تاريخ الرياضيات اليونانية»، الذي كتبه خلال الحرب العالمية الأولى.

يذكر هيث في مقدمته اقتباساً لأفلاطون حول مشكلة مضاعفة مكعب. ويبدو هذا الاقتباس ملائماً لسنوات الحرب التي كان يعيشها هيث: «لا بد أن الإله لم يرغب في حل هذا المشكلة على نحو خاص، بل أراد لليونانيين أن يكفُّوا عن الحرب والشرور، ويتوجهوا إلى ربّات الإلهام ويُشبعوا شغفهم بالفلسفة والرياضيات، فيعيشوا في سلام ووئام مع بعضهم البعض»[19].

لم يثبت على نحو قاطع أن الجذر التكعيبي لـ 2 غير قابل للإنشاء باستخدام الخطوط المستقيمة والدوائر فحسب حتى وقت مبكر من القرن التاسع عشر، لكن ظهر الشك في ذلك عند اليونانيين منذ القديم، واعتبروا هذه المشكلة بمثابة دافع للانتقال إلى طرق إنشاء رياضي أكثر تعقيداً، إلا أنها نهائية بالطبع.

تجدر الإشارة إلى أن طريقة أرخيتاس هي امتداد طبيعي إلى حدّ ما لطرق الإنشاء بالمسطرة والفرجار. تسمح هذه الطرق بـ:

1) تشكيل مسار حركة نقطة في أي اتجاه ثابت (بواسطة المسطرة)؛

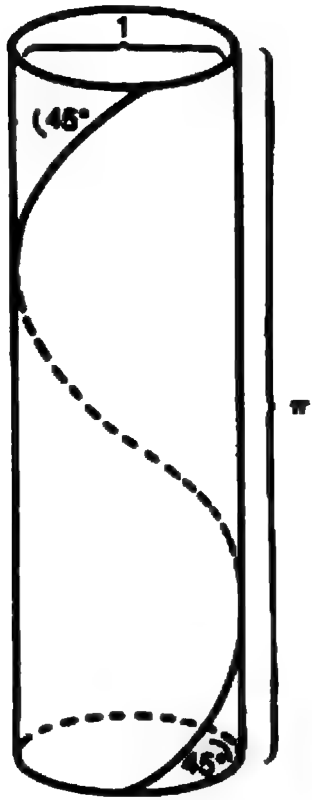
19- Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1921).

2) تشكيل مسار نقطة تدور حول أي نقطة أخرى (بواسطة الفرجار).

وللحصول على الأسطوانة والحلقة والمخروط في طريقة أرخيتاس نحتاج إلى:

1) تشكيل مسار أي منحنٍ مستوٍ يتحرك في أي اتجاه ثابت؛

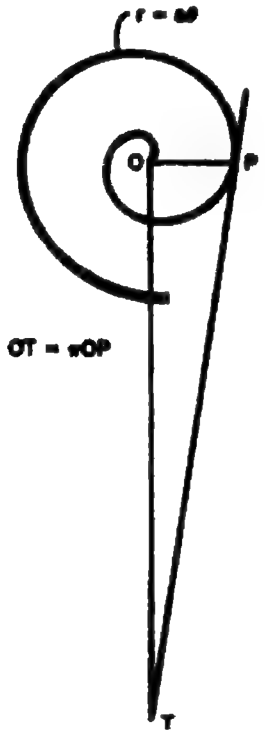
2) تشكيل مسار أي منحنٍ يدور حول أي مستقيم[20].



الشكل 53

20- يمكن أن نتخيل تعميم الحالتين 1) و2) إلى فضاء بعدد n من الأبعاد لكل n؛ وأود أن أعرف إذا كان من الممكن استخراج الجذور من الدرجة n هندسياً في فضاء بعدد n من الأبعاد بأشكال ذات n من الأبعاد للحالتين 1) و2). ستكون الحالة الأولى المثيرة للاهتمام هي استخراج الجذور الخامسة عن طريق بنية في فضاء خماسي الأبعاد.

أثبت «فيرديناند فون ليندمان» منذ عام 1882، أن العدد π عدد مُتسامٍ، أي إنه غير قابل للإنشاء أبداً بتقاطعات منحنيات وسطوح (جبرية) بسيطة لعدد منتهٍ من المرات. قد يميل المرء للقول إن بإمكاننا إنشاء π ببساطة بتدوير دائرة قطرها 1 دورة واحدة حول محورها، لكن هذه العملية تنطوي على مفهومي الحركة والزمن اللذين يخرجان عن الهندسة نوعاً ما. في الواقع، يمكن تمثيل فكرة تدوير الدائرة على نحو ثابت باللولب الموضَّح في الشكل 53. يتحرك هذا اللولب للأعلى بالسرعة نفسها التي يتحرك بها حول الأسطوانة، مما يصنع زاوية 45 درجة مع مولِّدات الأسطوانة عند كل نقطة. ويتضح أن التغيير العمودي الناتج خلال دورة كاملة مساوٍ لمحيط الدائرة.



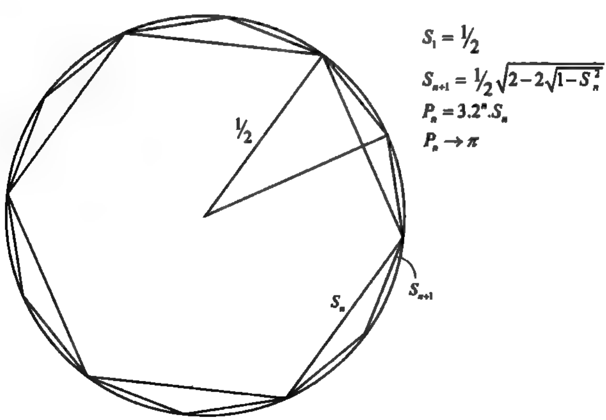
الشكل 54

قدَّم أرخميدس أيضاً عملية إنشاء لـπ في زمن منتهٍ، وهي موضَّحة في

الشكل 54. وتقوم على فكرة لولب أرخميدس، الذي نحصل عليه بتدوير خط بمعدل ثابت بينما تتحرك نقطة على طول هذا الخط بمعدل ثابت آخر. إذا بدأ اللولب عند O، وأكمل أول دورة عند P، فيمكن حينها رسم المماس PT والخط OT العمودي على OP في O، وستحدد النقطة T –حيث يتقاطع هذان الخطان– المسافة OT المساوية لـ π مضروبة بـ OP.

اعتمد اليونانيون طريقة عصرية أكثر للعثور على تقريبات π ، وهي «طريقة الاستنفاد». بدأت هذه الطريقة مع الفيلسوف أنتيفون، ثم أكملها أرخميدس، وتعتمد ببساطة على رسم مضلع داخل المساحة المطلوب تحديدها وكلما ازداد عدد الأضلاع اقتربنا من تحديد المساحة الحقيقية أكثر فأكثر. يمكننا عموماً حساب محيط أي مضلع. وإذا أوجدنا محيط مضلع ذي 96 ضلعاً، على سبيل المثال، يُرسم داخل دائرة قطرها يساوي 1، سنحصل على تقريب جيد لـ π. أثبت أرخميدس بهذه الطريقة أن $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. لا يوجد من حيث المبدأ أي حدٍّ للدقة التي يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة، لكن بالطبع لن نحصل على دقة لانهائية على الإطلاق في فترة زمنية نهائية بهذه الطريقة.

أوضحتُ طريقة الاستنفاد في الشكل 55. حيث نبدأ برسم مضلع سداسي داخل الدائرة في المرحلة 1، وعن طريق التنصيف المتكرر للأجزاء الفرعية من قوس الدائرة نصل في المرحلة n إلى: 3.2^n (حيث عدد أضلاع المضلع).

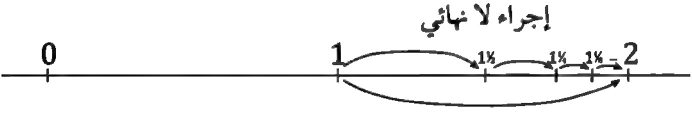


الشكل 55

يُعطى الطول S_n لضلع المضلع 3.2^n، المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ½، بواسطة الصيغة العودية الموضحة في الشكل 55. ولمعرفة كيفية الحصول على الصيغة، يمكننا النظر للشكل المذكور على أنه توضيح للانتقال العام من S_n إلى S_{n+1}، وبتطبيق نظرية فيثاغورس لمرتين نحصل على الصيغة. وبالنظر إلى طول الضلع S_n للمضلع المنتظم 3.2^n المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ½، يمكننا أن نقترب من تحديد π بمحيط هذا المضلع P_n، حيث $P_n=3.2^n.S_n$.

تعطي الصيغ الثلاث في الشكل 55 بمعنى ما وصفاً منتهياً لـπ، ولا تعطي ذلك بمعنى آخر. فهي من جهة تمكننا من حساب محيط المضلع P_n لقيم كبيرة وعشوائية لعدد أضلاع المضلع n، ومن أجل قيم كبيرة لـn فإن P_n سيكون قريباً جداً من π. ومن جهة أخرى، لا يمكن لهذه الصيغ أن تحدد الموضع الدقيق للنقطة π على مستقيم الأعداد بفترة زمنية محددة. (بل يلزمها زمن لانهائي للوصول إلى دقة لانهائية).

تُظهِر مفارقة زينون عن التنصيف هذا الفارق بوضوح. تقول المفارقة إننا للانتقال من النقطة 1 على مستقيم الأعداد إلى النقطة 2، أمامنا طريقتان: يمكن الانتقال لمسافة واحدة في مرة واحدة؛ أو يمكن الاعتماد على الإجراء اللانهائي من الانتقال بتنصيف المسافة كل مرة (½ ثم ¼ ثم ⅛ وهكذا).



الشكل 56

إذا تجاهلنا احتمال وجود نقاط لامتناهية في الصِّغَر تفصل بين النقطتين 1 و2، يمكن حينها اعتبار الطريقتين متساويتي النتيجة. وهذا ما يُعبَّر عنهُ عادة بالقول إن $1+1=1+½+¼+⅛+...$ اعتبر زينون ذلك تناقضاً، لأنه امتلك افتراضاً مسبقاً بعدم وجود لانهاية فعلية، لذا فلا يمكن اعتبار أي إجراء لانهائي كاملاً، وبالتالي فإن المساواة بين منتهٍ وغير منتهٍ مستحيلة.

كما ذكرتُ من قبل، يمثِّل الامتداد العشري العادي لعدد حقيقي عملية لانهائية لإيجاد موضع النقطة المقابلة للعدد المعني على مستقيم الأعداد. وبالرغم من أنها لانهائية، إلّا أن هذه العملية محددة تماماً. ويجب أن ندرك أنه بالنسبة للعديد من هذه الأعداد الحقيقية، لا توجد عملية محددة بديلة على الإطلاق لإيجاد الطول الموصوف.

لنأخذ على سبيل المثال العدد التالي:

$$L=10^{-1}+10^{-2!}+10^{-3!}+10^{-4!}+10^{-5!}+\ldots=$$

$$0.11000.1100010000000000000000001000000000000000$$
$$000000000000000000000000000000000000000000000000$$
$$00000000000000000000000000000000000000010\ldots$$

حيث العامل للعدد n ($n!$) هو ناتج ضرب كل الأعداد الطبيعية (الأعداد صحيحة الموجبة قطعاً) المساوية لـ n والأصغر منه، ما عدا الصفر.

في عام 1844، أثبت جوزيف ليوفيل أن هذا العدد متسامٍ، أي إن L ليس جذراً لأي معادلة متعددة الحدود بأمثال منطقية. توجد العديد من الأعداد المتسامية، لكن L كان العدد الأول الذي أُثبت تساميه. في الواقع، صُمِّم هذا العدد اصطناعياً لجعل هذا الإثبات ممكناً[21].

نظراً لأن L عدد متسامٍ، فلا يمكننا العثور عليه أبداً بطريقة تقليدية مثل طريقة أرخيتاس بتقاطع المنحنيات والأسطح الجبرية. وبما أنه عدد مُصطَنع، فمن غير المرجَّح أن نوجد قطعة مستقيمة طولها L بأي طريقة محدودة أخرى، مثل الإنشاءات الحلزونية واللولبية لـ π. إذاً، لا يمكننا إيجاد الطول المقابل للعدد L إلا بعملية لانهائية، مثل تلك التي شكّك زينون بوجودها.

21- للمزيد من التفاصيل التاريخية حول هذا الموضوع، انظر: Moris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972), p. 763 & 980. يُعتبر هذا الكتاب مفهوماً ومنظماً على نحو جيد. انظر أيضاً: Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964).

يمكننا بالطبع أن نفكر بمثالية أكثر مما ذُكر سابقاً، ونتخيل جهازاً يمكنه إنشاء أطوال موافقة لأعداد مثل L. يقوم هذا الجهاز بالجمع الهندسي لأي سلسلة لانهائية خلال ثانية واحدة، وذلك بطريقة ذكرناها سابقاً. فمثلاً، للامتداد العشري ($.r_1r_2r_3...$)، يوجِد الجهاز موضع r_1. في النصف الأول من الثانية، ثم r_1r_2. في الربع التالي من الثانية، ثم $r_1r_2r_3$. في الثُّمن التالي... وعند نهاية ثانية واحدة سيحدد الجهاز النقطة الموافقة للامتداد العشري المطلوب.

ليس من الجيد حقاً أن نضطر إلى التفكير بمثالية في حديثنا عن الإنشاءات بالمسطرة والفرجار. إن انتقالنا من 1 إلى 2 على مستقيم الأعداد خلال ثانية واحدة، يماثل تصرف الجهاز المُتخيَّل على السلسلة $1 + ½ + ¼ + ⅛ + ...$! وبالمناسبة، كان هذا جزءاً من إجابة أرسطو على مفارقة زينون حول التنصيف: بما أننا نتحرك بالفعل كما يتحرك الجهاز خلال الزمن (أي حركة لانهائية في زمن نهائي)، فلا يوجد تناقض جوهري في ذلك.

علينا أن نحذر من إدخال سلسلة متشعبة في الجهاز الذي تخيلناه، لأن ذلك سيتسبب في تعطيله. على سبيل المثال، إذا عمل الجهاز على سلسلة غراندي ($1-1+1-1+1-1+...$)، سيتحطم إلى قطع متناثرة. بالنظر إلى هذه السلسلة من جهة، نجد: $0=...+(1-1)+(1-1)$؛ وبالنظر من جهة أخرى، نجد: $1=...+(1-1)+(1-1)+1$!

اكتشف هذه السلسلة عالم الرياضيات ورجل الدين الإيطالي غويدو غراندي في عام 1703، وافترض أن الإله استخدم تقنية تعتمد على هذه السلسلة لخلق شيء من لا شيء، وبذلك جعل الكون يجري[22]. ربما ليست هذه الفكرة جنونية كما تبدو. في عصرنا نقول ما يشبه ذلك بعبارة أكثر تعقيداً: الكون عبارة عن تموُّج في نسيج الزمكان، أي إنه نمط تداخل ناتج عن دالَّة موجية خارج الطور نفسه.

في كل الأحـوال، إذا أدخلنا سلسلة غراندي في الجهاز، سيتحرك

22- انظر: G. H. Hardy, *Divergent Series* (Oxford: Clarendon Press, 1949).

المؤشر بين النقطتين 0 و1 ذهاباً وإياباً عدداً لانهائياً من المرات بسرعة تصل إلى اللانهاية مع مرور الثانية المحددة. وما لم نضمِّن الجهاز مسبقاً بعض الأحكام الخاصة (مثل «ضع المؤشر على 1 عندما حدوث ارتياب»)، فلن يشير إلى أي نقطة دون الأخرى عند نهاية الثانية. لذا أفضل أن أقول إنه سيتحطم.

جادل فلاسفة العلم في فكرة التعامل مع سلسلة متشعبة لانهائية، مثل جيمس ف. ثومسون، صاحب مشكلة المصباح، التي ذكرناها في ألغاز ومفارقات الفصل الأول[23]. كما وجدنا، لا يصادف الجهاز أي مشكلة في التعامل مع سلسلة متقاربة مثل الامتداد العشري لعدد حقيقي. حيث تصبح حركة المؤشر أصغر فأصغر حتى يستقر بسلاسة عند نقطة معينة في نهاية الثانية المحددة. وإذا أمسكت بين إصبعيك قلم رصاص وتركت رأسه يرتد عن الطاولة، سترى حركة مشابهة لحركة مؤشر الجهاز عندما يعمل على سلسلة متقاربة. من حيث المبدأ، يرتد القلم عدداً لانهائياً من المرات، لكن المسافة التي يجتازها نهائية ويمكن حسابها وتحديدها، وزمن حدوث ذلك محدود أيضاً. أمّا عملياً، إذا كانت المسافة بين رأس القلم والطاولة تساوي إنشاً واحداً، وفي كل مرة يرتد فيها القلم يصل إلى 9/10 من الارتفاع الذي يسقط منه، ستكون المسافة الكلية التي يقطعها تساوي $1+9/10+(9/10)^2+(9/10)^3+...=10$، ويمكن للزمن أن يكون محدداً بالطريقة ذاتها.

من الآن، سنقول إن العدد الحقيقي r وُصف وصفاً نهائياً إذا كان هناك وصف محدود لكيفية توليد سلسلة الامتداد العشري $R.r_1r_2r_3...$ من r. وعموماً، يتألف هذا الوصف المحدود من مجموعة عامة من التعليمات التي بتطبيقها على أي عدد طبيعي n ستنشئ إجراء ينتهي بتقييم الرقم r_n. يمكننا تطبيق ذلك على جهازنا المُتخيَّل، حيث ندخل وصفاً مماثلاً لما سبق لدالَّة عامة تعطينا العدد R و r_n لكل n لتحديد نقطة معينة على مستقيم الأعداد الحقيقية.

23- انظر: José Benardete, *Infinity*, and Wesley Salmon, ed., *Zeno's Paradoxes.*

يبدو بعض مما سبق غامضاً قليلاً، وكما سنرى في القسم الفرعي «مفارقة ريتشارد»، يؤدي هذا الغموض إلى تعقيدات مثل التي خرجنا بها من مفارقة بيري: «قابل للوصف في أقل من مليار كلمة».

مكتبة بابل

في محاولتنا العثور على عدد حقيقي عشوائي ليس له أي وصف محدود على الإطلاق، يجب أن يكون لدينا فكرة واضحة عن مجموعة «كل الأوصاف المحتمَلة».

في البداية، علينا أن نغفل فكرة «وصف ذو معنى»، وأن نقبل أي سلسلة من الرموز على أنها «وصف محتمَل». هذه المجموعة التي تضم جميع السلاسل من الرموز المطبوعة هي المجموعة المثيرة للاهتمام التي نحن بصدد نقاشها.

تناول «كورد لاسويتز» فكرة مجموعة مماثلة في مؤلَّفه «المكتبة العالمية[24]»، وأيضاً خورخي لويس بورخيس في قصته «مكتبة بابل»[25]. في قصة بورخيس، نقرأ ما يقول أحد سكان المكتبة عنها: «إن الكون (الذي يسمِّيه آخرون المكتبة)، يتألف من عدد غير محدد، وربما لانهائي من القاعات السداسية الزوايا، التي تتوسَّطها مناور واسعة للتهوية تحيط بها درابزونات جدّ منخفضة. من كل من هذه السداسيات نبصر الأدوار السفلى والعليا بلا انتهاء... كل جدار من هذه السداسية يحمل خمسة رفوف، كل رف يحوي اثنين وثلاثين كتاباً من قطع موحد، كل كتاب مكوَّن من أربعمئة وعشر صفحات، كل صفحة من أربعين سطراً، وكل سطر من ثمانين حرفاً أسود». وتبدو معظم هذه الكتب خليطاً لا معنى له من الحروف.

يقضي الراوي وزملاؤه حياتهم كلها يتجولون في هذه المكتبة، محاولين

24- *The Universal Library* by Kurd Lasswitz.
أعيد طبعه في: Clifton Fadiman, ed., *Fantasia Mathematica* (New York: Simon and Schuster, 1958), pp. 237-247.

25- Jorge Luis Borges, *Labyrinths*, pp. 51-58.

بدون توقف أن يتكهَّنوا بما يعنيه كل شيء. يعتقد بعضهم أن لكل كتاب معنى حسب لغة ما، إن لم يكن بالإسبانية فباللغة الإنكليزية أو المجرية؛ وإن لم يكن بأي لغة معروفة، فهو إذاً بلغة مستقبلية أو رمزية. ولكن المكتبة قد تحوي كتاباً تحمل كل صفحاته حرفاً مكرراً واحداً، وليس لذلك أي تفسير. ويستنتج الراوي أن المكتبة تضم بالفعل كل سلسلة محتمَلة من الرموز التي يمكن أن تمتد على 410 صفحات.

يشعر الراوي أن المكتبة تحتوي على كل شيء، وبعبارات بورخيس الرائعة: «كل شيء: التاريخ الدقيق للمستقبل، السير الذاتية لرؤساء الملائكة، ألوف وألوف من الفهارس الزائفة، البرهان على زيف هذه الفهارس، البرهان على زيف الفهرس الحقيقي، إنجيل باسيليوس الغنوصي، شرح هذا الإنجيل، شرح شرح هذا الإنجيل، قصة موتك الحقيقية، ترجمة كل كتاب في كل اللغات، التضمينات النصية من كل كتاب، الدراسة التي كانت قد تُكتب (ولم تُكتب) عن الميثولوجيا الساكسونية، وأيضاً كتب تاقيطس المفقودة»[26].

تبدو مكتبة كهذه غير ذات فائدة، فاختيار كتاب منها عشوائياً يعادل الجلوس وكتابة 410 صفحات من الحروف العشوائية. وحتى إذا تمكنّا، بمعجزة ما، من العثور على كتاب يقدِّم حلاً لمشكلة الاستمرارية عند كانتور، فعلينا أن نتحقق بعناية للتأكد من أننا لم نحصل على واحد من آلاف الإصدارات المزيفة من هذا الكتاب. وحتى لو بدا الكتاب خالياً من الأخطاء، فمن الممكن العثور على كتاب آخر خالٍ من الأخطاء أيضاً ويقدِّم حلاً مختلفاً تماماً للمشكلة ذاتها. كما لن يكون النظر إلى عناوين الكتب مجدياً، فكتاب يحمل عنوان «مشكلة الاستمرارية» قد يتضِّح أنه يتحدث عن السفر إلى النجوم.

يبالغ راوي «مكتبة بابل» في وصفه لها. لن يتناسب «التاريخ الدقيق للمستقبل» مع أي كتاب مؤلَّف من 410 صفحات. وبالتأكيد لن يتناسب فهرس مكتبة بابل مع عدد صفحات كهذه أيضاً. من أجل مكتبة تحوي كل

Jorge Luis Borges, *Labyrinths*, p. 54. –26

شيء، على المرء أن يسمح للكتب بأن تملك أي عدد منتهٍ من الصفحات مهما كان كبيراً، عندها تصبح المكتبة لانهائية.

حاول بورخيس أن يحدد المكتبة قليلاً بتقييده الرموز المستخدمة في الكتب بخمسة وعشرين حرفاً: اثنان وعشرون حرفاً هجائياً، إضافة إلى النقطة والفاصلة والمساحة بين الكلمات. لكن ذلك لا يقلّل كثيراً من حجمها المهول، فكل كتاب يحوي 1.312.000 (ناتج $410\times40\times80$) فراغاً يمكن ملؤه بأحد الحروف الخمسة والعشرين. وهـذا يعني $25^{1.312.000} \approx 10^{2.000.000}$ كتاباً، عدا عن التكرار.

وصل كورد لاسويتز إلى العدد نفسه من الكتب في «المكتبة العالمية»، وللدلالة على كِبَر هذا العدد، ذكر أنه لو وُضعت الكتب جنباً إلى جنب ستحتاج رفاً يمتد لمسافة $10^{1.999.982}$ سنة ضوئية. في الواقع، تضم «المكتبة العالمية» عدداً من الكتب لا يقل كثيراً عن طول هذا الرف المُفترض.

كما ذكرتُ أعلاه، إذا سمحنا للكتب بأن تملك أي عدد من الصفحات، فهناك عدد لانهائي من الكتب فيما يمكن أن نسمِّيه «المكتبة الشاملة». وذلك لأنه لكل عدد طبيعي n، سيوجد كتاب يتكوَّن من تكرار كلمة ما («في» مثلاً) بعدد n من المرات. وبالتالي سيكون كل كتاب مؤلَّف من تكرار الكلمة وفق كل عدد طبيعي موجوداً في المكتبة. (الكتاب «في»، الكتاب «فيفي»، الكتاب «فيفيفي»،...)

نظراً لأن المكتبة الشاملة ستكون لانهائية بالفعل، فلا فائدة من تقليل عدد الرموز المستخدَمة في الكتب. إن هذا الكتاب، «اللانهاية والعقل»، يستخدم ما يقارب ثلاثمئة رمز مطبعي، لكن للحفاظ على نقاشنا ضمن حدود سهلة سنقتصر على خمسة وسبعين رمزاً: الحروف الأبجدية الرومانية الكبيرة والصغيرة، الأرقام من 0 إلى 9، المساحة، الفاصلة، الفاصلة العليا، الفاصلة المنقوطة، الشرطة، النقطتان، النقطة، علامة التعجب، علامة الاستفهام، علامتي الاقتباس، والقوسين.

هل من خطأ في لانهائية المكتبة الشاملة؟ إذا لم تكن دقيقاً، قد تعتقد ذلك، مستنتِجاً ما يلي: يمكن إنشاء كتاب بطول محدود عشوائي باستخدام

رمز واحد من بين الخمسة والسبعين رمزاً وتكراره أوميغا مرة: أي يوجد $75\times75\times75\times... = 75^{\omega} = c$ طريقة؛ لذلك تملك المكتبة الشاملة عدداً لا حصر له من العناصر، كل عنصر هو استمرارية[27].

يظهر الخطأ في هذه الحجة في أننا حسبنا عدد الكتب ذات الطول أوميغا فجسب، دون عدد الكتب ذات الطول الأقل. إن عدد عناصر المكتبة الشاملة أكبر من أوميغا، إنه أَلِف–صفر، ونثبت ذلك بإنشاء مخطط يصل كل عنصر من «مجموعة الكتب المنتهية» بعنصر واحد آخر من «مجموعة الأعداد الطبيعية»، ولنسمِّ هذا المخطط «الشيفرة». يثبت ذلك أن عدد عناصر المكتبة الشاملة أصغر أو يساوي الأَلِف–صفر، وبما أن البرهان السابق يثبت أن عدد هذه العناصر أكبر أو يساوي الأَلِف–صفر، فيعني ذلك أن عدد العناصر يساوي الأَلِف–الصفر، حسب قواعد حساب الأعداد فوق المنتهية.

لإعداد المخطط، نبدأ بتعيين رمز رقمي لكل من الرموز الأساسية الخمسة والسبعين:

-1	y-28	X-56
a-2	z-29	Y-57
b-3	A-31	Z-58
c-4	B-32	0-59
d-5	C-33	1-61
e-6	D-34	2-62
f-7	E-35	3-63
g-8	F-36	4-64
h-9	G-37	5-65
i-11	H-38	6-66
j-12	I-39	7-67

27- انظر التدريب الأول، «الاستمرارية»، الذي يقدِّم توضيحاً لـ c، العدد الأصلي للاستمرارية.

k–13	*J*–41	8–68
l–14	*K*–42	9–69
m–15	*L*–43	‘–71
n–16	*M*–44	,–72
o–17	*N*–45	-–73
p–18	*O*–46	;–74
q–19	*P*–47	:–75
r–21	*Q*–48	.–76
s–22	*R*–49	!–77
t–23	*S*–51	?–78
u–24	*T*–52	“–79
v–25	*U*–53	”–81
w–26	*V*–54	(–82
x–27	*W*–55	)–83

نحرص على استخدام الأرقام في الرموز بدون أصفار، حيث نستخدم الصفر لغرض مختلف. لترميز سلسلة معينة، نستبدل كل رمز بالرقم الموافق له من الجدول، ونضع الأصفار كفواصل بين أرقام الشيفرة لنتمكن من التمييز بينها، ثم نضعها مع بعضها البعض لنحصل على عدد طبيعي كبير. يجعل استخدام الأصفار كفواصل فك أي شيفرة أمراً ممكناً.

إن الفكرة من ذلك هي أن يحمل كل كتاب في المكتبة الشاملة شيفرة بواسطة عدد طبيعي منتهٍ.

ويمكنكم التأكد مثلاً أن ترميز نص رواية «موبي ديك» يبدأ بـ:

330201401401015060103902209015020601407600 ...

يمكن أن نفكر أن الكتب في المكتبة الشاملة مرتَّبة حسب أطوال رموزها، بدءاً من جميع الكتب التي يبلغ طولها رمزاً واحداً، ثم جميع الكتب التي يبلغ طولها رمزين اثنين، ثم الكتب ذات الرموز الثلاثة، وما إلى ذلك.

إذا عُدنا لعملية الترميز للحظة، يمكننا أن ندرك الإمكانية النظرية لتعليم

أي طفل قراءة رموز الكتب بدلاً من الكتب نفسها؛ أي تعليمه أن 2 و3 و4 و... هي الأبجدية، واستخدام 76 في نهاية الجملة، واستخدام الأصفار كفواصل، وهكذا.

إن المكتبة الشاملة بالنسبة لشخص تعلم القراءة بهذه الطريقة هي ببساطة مجموعة فرعية لانهائية من مجموعة الأعداد الطبيعية. ويصبح من المألوف أن يتحاور اثنان: «هل قرأت 3, 207, 201, 520, 110, 320, 820, 170, 220, 010, 094, 102, 101, 306, 710, 620؟»، «أجل، أعجبني أكثر من 45». في الواقع، إن رموز حروفنا الخاصة ليست مقدَّسة على نحو خاص. والأمر الأساس في أي كتاب هو النمط العام الذي تشكِّله هذه الرموز.

تنشأ فكرة غريبة هنا. لنفترض أننا أعطينا الرموز الرقمية لجميع الكتب الموجودة في مكتبة الكونغرس لمجموعة من الكائنات الفضائية. وقُمنا بتزويدهم بشرح لجميع أنماط الرموز المتكررة من خلال أنماط رمزية أخرى إلى الحد الذي يمكنه فيه تفسير معنى أي كلمة. هل سيتمكن الكائن الفضائي من معرفة ما في الكتب؟ وحتى إن لم يستطع فهمها بالمعنى المعتاد، فهل سيُقدِّر الأنماط الفنية للرموز في الكلاسيكيات الأدبية مثلاً؟ ستظهر هذه الأسئلة حتى لو أعطينا الكائن الفضائي كتباً باللغة الإنكليزية.

الهدف من هذا المثال هو إظهار حقيقة أن الكائن الفضائي عندما ينظر إلى نصّ من نصوصنا البشرية، لن يرى إلا البنية المجردة للنص.

ابتكر العلماء المهتمون بفكرة الاتصال مع حياة محتمَلة خارج الأرض بعض الرسائل البسيطة للغاية لتُبثَّ في الفضاء الخارجي. كما حملت المركبة الفضائية «بيونير» بعض أنماط المعلومات الأكثر تعقيداً، وتضمَّنت تسجيلاً لإحدى أغاني تشاك بيري. ربما ستلاحظ الكائنات الفضائية بعض الانتظام في نمط الترميز الرقمي لهذه الأغنية، وبعض التطورات الرياضية.

تُعتبر الأغنية نوعاً غريباً من نمط المعلومات لأنها لا تحمل محتوى حقيقياً، ونقدِّرها نحن ببساطة لـ«شكلها». وقد يميل المرء للاعتقاد أن بإمكاننا تعليم الكائنات الفضائية ما تعنيه كلماتنا، ربما عن طريق الصيغ الكيميائية للأشياء، وما إلى ذلك. لكن مع ذلك، يبدو أن هناك جزءاً كبيراً

من تجربتنا اللغوية التي لا يمكن تعليمها إلا من خلال العَرض المباشر (كما نعلم الأطفال): «لا عليك، اشربي... هذا ماء، هيلين، ماء».

ربما تستمتع الكائنات الفضائية برسائلنا بطريقة حسية فحسب، كما نستمتع بالموسيقى والفن التجريدي. وقد يقرؤون معاني خاصة في هذه الرسائل من وجهة نظرهم للعالم.

يشابه مثال الكائنات الفضائية التي تنظر إلى كتبنا مسألة متى تحدد سلسلة من الرموز عدداً حقيقياً. بالنسبة للبعض، الرمز π هو اسم يحدد عدداً حقيقياً. ويفضل آخرون الاسم الأطول: «π هي نسبة محيط دائرة إقليدية إلى قطرها». وربما يحتاج شخص غير مُلمٍّ بالرياضيات إلى أطروحة كاملة في الهندسة المستوية لتعريف π. من المفترض لأطروحة كاملة وكافية أن تمكِّن أي نوع من الكائنات العاقلة من استنباط واستخدام صيغة π الموضحة في الشكل 55، حتى لو لم يكن لدى هذه الكائنات فكرة عن نوع التجارب البصرية واللمسية التي يربطها البشر بـ «الدوائر».

يمكن للمرء استخدام تعريف π الذي نقوم بإثباته عادة في نهاية الصف التعليمي للتفاضل والتكامل في السنة الثانية: «π هي حدّ السلسلة اللانهائية $4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 - \ldots$».

الآن، تُعتبر أجهزة الحاسوب الرقمية هي الكائنات الفضائية الوحيدة التي يمكننا التحدث معها حالياً، لذا غالباً ما تُعتبر معياراً لمفهوم قابلية التسمية. وتتشابه الأجهزة الحاسوبية في بنيتها الأساسية من حيث إنها جميعها «آلات تحويل عالمية»، لذا يمكننا التحدث عن حاسوب عام C بدون حاجة لتحديده بدقة. والآن، يمكننا القول إن الكتاب B_l يسمِّي العدد الحقيقي r، حيث $r=K.e_1e_2e_3\ldots$، بشرط أن إدخال B_l في الحاسوب C يؤدي إلى دخول C في الحالة التالية: إذا أُدخل صفر فإن C يطبع K، وإذا أُدخل أي عدد طبيعي n أكبر من الصفر فإن C يطبع الرقم ذو الترتيب n من الامتداد العشري للعدد الحقيقي r.

في القسم الفرعي التالي، سنستخدم العبارة «يسمِّي B العدد الحقيقي r» بعدة طرق. وإذا كانت الطريقة التي ذكرناها تواً، سنقول «B هو اسم الحاسوب C للعدد الحقيقي r» للتأكيد على ذلك.

مفارقة ريتشارد[28]

توصلنا مفارقة ريتشارد إلى إثبات عدم قدرة الإنسان على تقديم وصف محدّد لكيفية تحويل الكلمات إلى أفكار. ونعبِّر عن ذلك رياضياً بقولنا إن العدد الحقيقي الذي يرمز لجميع الأعداد الحقيقية القابلة للتسمية، هو عدد غير قابل للتسمية. وسنشرح ذلك تقنياً فيما يلي.

نفترض أن M نوع من الوجود: حاسوب، أو إنسان، أو البشرية كلها، أو مجرة قادرة على التفكير، أو الإله ذاته. نقول إن السلسلة المحدودة من الرموز B هي اسم M– للعدد الحقيقي s، إذا كان M قادراً على إعطاء العدد s على أساس المعلومات التي تحملها رموز B. وكما ناقشنا في «بناء الأعداد الحقيقية»، قد نعرف أحياناً قيمة العدد الحقيقي بالرغم من أننا لا نستطيع إعطاء الامتداد العشري اللانهائي الكامل دفعة واحدة. وسنقبل أن M قادر على إعطائنا العدد الحقيقي s إذا تمكن من أن يعطي الرقم ذو الترتيب n من الامتداد العشري أياً تكن n.

حسب ما سبق، نحن قادرون على إعطاء العدد الحقيقي π، ليس لأننا نعرف امتداده العشري كاملاً، بل لأنه أياً تكن n، يمكن أن نعطي الرقم ذا الترتيب n من امتداده العشري. والسبب في ذلك هي تقنية معينة لحساب أرقام الامتداد العشري لـπ. وإن سلسلة الرموز التي تصف تقنية الحساب هذه تمثِّل اسم العدد الحقيقي π.

لنركِّز اهتمامنا على M معيِّن، وليكن لدينا المجموعة E_m التي تحتوي جميع الأعداد الطبيعية ذات الاسم المحدود. وبما أنه يمكننا أن نجد دالَّة التحويل «تحويل–M» التي تعطينا جميع الأعداد القابلة للعَد على أنها المجموعة E_m، فإن هذه المجموعة قابلة للعَد.

تُظهِر تقنية الأقطار التي سندرسها في التدريب الأول كيفية العثور على عدد حقيقي مختلف عن أي عنصر في أي مجموعة من الأعداد الحقيقية

28– فكرت في مفارقة ريتشارد لسنوات عديدة، وإني أشعر بالأسف لأن هذا القسم أصبح تقنياً للغاية. لا بد أن معظم القرّاء سيتجاوزونه؛ أو لفهم أفضل، يمكنكم قراءته بعد قراءة «الاستمرارية» في التدريب الأول.

القابلة للعَد، لذا يبدو أنه لأي M، سيوجد أعداد حقيقية ليس لها أي اسم محدود، ويمكننا أن نسمِّيها أعداد M العشوائية.

إن مسألة ما إذا كان هناك أفضل نسخة من M هي: هل يوجد نوع من M المطلق حيث أي عدد حقيقي ليس له اسم محدد يكون له اسم في M؟ في هذه الحالة، يمكننا التفكير في الأعداد M العشوائية بالمعنى المطلق لعدم وجود وصف محدّد لها على الإطلاق.

سنحصر انتباهنا في هذه المرحلة بالأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد فقط، لأن طبيعة التسلسل اللانهائي من الأرقام هي ما يهمنا هنا، لذا يكفينا أن نبحث في الأرقام الموجودة على يمين الفاصلة العشرية.

بالعودة إلى M، من الأسهل التفكير بها سلوكياً. إن M هو شيء يحوِّل الأعداد الطبيعية إلى أعداد حقيقية، وإذا سلك اثنان من M السلوك ذاته فإننا نعتبرهما متطابقين. لذا يمكننا تعريف M بقائمة محددة من الأعداد الحقيقية، والتي يمكن بدورها أن تُرمَّز بعدد حقيقي واحد.

عموماً، بالنسبة لـ M معين وعدد طبيعي n معين، نعرِّف «$Trans_M(n)$» ليكون العدد الحقيقي $(0.e_{n1}\ e_{n2}\ e_{n3}\ldots)$ المُعطى بواسطة التعريف.

فيما يتعلق بالسلوك، تُعطى M بالمصفوفة المربعة اللانهائية المضاعفة لجميع e_{nk}. حيث يمكننا أن نضع جميع e_{nk} في متتالية ω من خلال نوع معين من التبديل العشوائي، والتي يمكن اعتبارها أيضاً عدداً حقيقياً ندعوه T_m أو $0.m_1\,m_2\,m_3$

$$
\begin{array}{lllllll}
1 \rightarrow Trans_M(1) = . & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & . \\
2 \rightarrow Trans_M(2) = . & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\
3 \rightarrow Trans_M(3) = . & 2 & 5 & 2 & 5 & 2 & \\
4 \rightarrow Trans_M(4) = . & 0 & 8 & 1 & 4 & 9 & \\
5 \rightarrow Trans_M(5) = . & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
T_M &= .e_{11}e_{12}e_{21}e_{13}e_{22}e_{31}e_{14}e_{23}e_{32}\,e_{41}e_{15} \\
&= .\ 1\ 2\ \ 9\ 3\ 9\ 2\ 0\ 9\ 5\ 0\ 3\ 9\ 2\ 8\ 0\cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

يمكننا الحصول على عدد آخر مثير للاهتمام من هذه المصفوفة المربعة، وهو العدد القطري $d_M=0.d_1\ d_2\ d_3...$ معرَّف حيث:

$$d_n=\begin{cases}\text{إذا } e_{nn}\neq 0 \text{ تكون } e_{nn}-1\\ \text{إذا } e_{nn}=0 \text{ تكون } 1\end{cases}=\begin{cases}\text{إذا } m_{(2n^2-2n=1)}\neq 0 \text{ تكون } m_{(2n^2-2n+1)}-1\\ \text{إذا } m_{(2n^2-2n+1)}=0 \text{ تكون } 1\end{cases}$$

يختلف العدد d_m عن كل عناصر $Trans_M(n)$، يعني ذلك أن d_m هو عدد عشوائي من M وليس له اسم في M.

يتضح بقليل من التفكير أن بإمكاننا تعريف العدد مباشرة من T_m حيث إن e_{nn} هي دائماً $2n^2-2n+1$ تُوضع مكان T_m. وبإمكاننا استخدام تعريف d_m الذي في متناول اليد. ونعبِّر عن اعتمادنا على T_m في تعريف بالقول $d_m=f(T_m)$.

نقول إن نظام التسمية M «مغلق» إذا كان لكل اسم في M لعدد حقيقي s، يوجد أيضاً أسماء لأعداد حقيقية اعتماداً على s. أي إن نظام التسمية M مغلق إذا سمَّى العدد الحقيقي s، ثم سمَّى أيضاً العدد الحقيقي التابع لـ s: $f(s)$، مما يعني أن قيام M بتسمية الرمز T_N وفق نوع من نظام التسمية يعني أنه سيسمِّي أيضاً القطر d_n وفق نظام التسمية هذا. وبالنظر إلى التعريف أعلاه لـ d_M اعتماداً على T_M، نجد أن تبنِّي أي نظام تسمية على نحو طبيعي من قِبَل كائن عقلاني سيُغلق بهذا المعنى.

ضعوا في اعتباركم أن نظام التسمية المغلق $M.M$ لا يمكنه تسمية العدد القطري d_M، لأن هذا العدد مبني ليختلف عن أي عدد حقيقي له اسم في نظام التسمية M. إذا وُجد في M اسم لـ T_M، ولأن M نظام مغلق، فإن النظام سيسمِّي أيضاً، لكن هذا مستحيل. لذا ليس في نظام التسمية M اسم لـ T_M. وعموماً، لا يمكن لنظام تسمية مغلق أن يسمِّي العدد الحقيقي T_M الذي يرمِّز هذا النظام.

اكتشف جول ريتشارد هذه الحقيقة لأول مرة عام 1905. كان ريتشارد مدرِّساً في مدرسة ثانوية في فرنسا في ذلك الوقت. وصاغ الحقيقة «لا يوجد نظام تسمية مغلق M يسمِّي العدد T_M» كمفارقة من خلال اعتبار نظام التسمية علاقة عالمية مُعطاة وواضحة. حيث افترض أن «B هو اسم لـ s» هي علاقة

واضحة تماماً. ولكن إذا كانت العلاقة واضحة تماماً، فالعدد الحقيقي T الذي يرمِّز جميع الأعداد الحقيقية القابلة للتسمية واضح أيضاً، والقطر d واضح كذلك. ولكن لا يمكن تسمية d لأنه يختلف ببنائه عن كل عدد حقيقي. إذاً، بافتراضنا أن علاقة التسمية موصوفة بالكلمة «تسمية»، يمكننا تسمية العدد d الذي يختلف عن كل الأعداد الحقيقية التي يمكننا تسميتها. هذه هي مفارقة ريتشارد.

كان ريتشارد قادراً على رؤية حل المفارقة بإنكار أن نظام التسمية M الذي يفكر فيه الشخص يمكنه أن يسمِّي T_M. ووفق تعبيره، فإن العدد القطري لا يُسمَّى من قِبَل M إلا إذا حُدِّد رمز التحويل T_M بالكامل، «ولا يتم ذلك إلا بعدد لانهائي من الكلمات»[29].

هل من معنى أعمق لحقيقة أنه لا يوجد نظام تسمية مغلق M يسمِّي رمز التحويل الخاص به؟ من وجهة نظر شكلية، نحن نقول ببساطة إنه عندما تُحلَّل بعض الأعداد الحقيقية T_m بالطريقة الموضحة أدناه، فإن العدد الأصلي لا يظهر بين الأعداد التي تم الحصول عليها.

$$T_M = .\,1\,2\,9\,3\,9\,2\,0\,9\,5\,0$$

$$\text{Trans}_M(1) = .1\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ldots$$
$$\text{Trans}_M(2) = .9\ \ 9\ \ 9$$
$$\text{Trans}_M(3) = .2\ \ 5$$
$$\text{Trans}_M(4) = .0$$

ينطبق ذلك على الأعداد T_M التي ترمِّز نظام تسمية مغلق. من الجدير بالذكر أنه إذا رمَّز T_M نظام تسمية مغلق، فيجب ألا يؤدي تحليل أحد الأعداد الجديدة مثل $Trans_M$ (3) إلى ظهور أي أعداد غير موجودة في التحليل الأول.

إذا فكرنا في نظام التسمية M على أنه إنسان، فيمكننا أن نتخيل الأعداد على أنها كتب مؤلَّفة من كلمات، ونتخيل $Trans_M$ على أنها عملية ترجمة

29– أوصل جوليس ريتشارد مفارقته إلى العالم عن طريق رسالة: The Principles of Mathematics and the Problem of Sets. والتي أُعيدت طباعتها في: Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, pp. 142–144.

كل كتاب حقيقي إلى عدد حقيقي. لا يمكن أن يوجد كتاب يُترجَم إلى العدد الحقيقي T_M الذي يرمِّز كل أنشطة الإنسان M.

يمكن أن نجعل هذه الفكرة أكثر غنى، باعتبار أرقام الرموز كتباً مؤلَّفة من كلمات، وربما يمكننا التفكير بالأعداد الحقيقية التي نسميها بهذه الكلمات على أنها أفكار. إن فكرة العدد π تجسد الامتداد العشري اللامتناهي بالكامل في نمط بسيط. عموماً، العدد الحقيقي هو شيء يشبه الفكرة، لأن له وجوداً محدداً كعنصر عقلي (على عكس المادي)، ومع ذلك يقدِّم معياراً للتقريب المادي الملموس (أي الأجزاء الأولية من الامتداد العشري اللانهائي). لذا يمكننا القول إن حجة ريتشارد أثبتت أن الإنسان غير قادر على أن يقدِّم وصفاً محدداً لكيفية تحويل الكلمات إلى أفكار.

يشبه ذلك إلى حدّ كبير المغزى الذي خلصنا إليه من مفارقة بيري، فلا يمكن لأي مخطط محدود أن يستوعب جوهر كيفية ربط المرء الحقيقة بالمثال، المادي بالعقلي، اللغة بالأفكار.

لكن حتى لو أن نظام التسمية M لا يملك اسماً محدوداً لـT_M، ألا يمكن أن يوجد نظام تسمية M^* أفضل من M يملك اسماً لـT_M؟ يظهر لدينا هنا بديلان. من ناحية، قد يكون T_M غير قابل للحل على الإطلاق، بمعنى أنه لا يوجد نظام محدود M^* يمكنه تسمية T_M. وعندها سيكون M معقداً على نحو لانهائي. ومن ناحية أخرى، قد توجد طريقة محدودة ليعطي M اسماً لـT_M ضمن نظام أعلى M^*. إن M في هذه الحالة نظام غير مكتمل.

نستنتج من ذلك أن أي نظام تسمية أعداد حقيقية يجب أن يكون إما معقداً على نحو لانهائي (حيث يكون T_M عشوائياً بالمعنى المطلق) أو غير مكتمل (حيث يقبل T_M في النهاية بالوصف المحدود).

كان الدافع الحقيقي لتناولنا مفارقة ريتشارد هو محاولة العثور على عدد حقيقي عشوائي تماماً ويجيب على عدم وجود وصف محدود. إذا اعتقدنا بوجود نظام تسمية أقصى U، فلا يمكن أن نحسِّن U إلى نظام تسمية U^* الذي يمكنه تسمية جميع عناصر U إضافة إلى تسمية T_U أيضاً. لذا إن اعتقدنا بوجود مثل هذا النظام، فإننا نعلم أن هناك عدداً حقيقياً عشوائياً -أي رمز

التحويل T_U. وإذا قبلنا أن تكون العلاقة «B تسمّي s» ذات معنى بدون مزيد من المواصفات، فإننا نفكر حقاً من حيث النظام الأقصى U. لكن هناك بعض التساؤل إن كانت هذه الطريقة منطقية أم لا.

يمكن أن يكون المرء صلب الذهن وينكر وجود نظام تسمية M ما لم يُحدَّد على نحو شامل من خلال قواعد ومخططات مختلفة. إن نظاماً مثل ذلك هو في الأساس شيء محدود، ويمكن تحسينه دائماً للحصول على M^* أفضل يستطيع وصف T_M. إن هذا النوع من العمليات يمكن أن يستمر إلى الأبد بدون الوصول إلى نقطة توقف. ويشبه الأمر الطريقة التي يمكننا بها دائماً العثور على عدد طبيعي أكبر بدون الوصول إلى عدد لانهائي فعلاً.

تعطينا الحجة المماثلة لحجة ريتشارد عدداً حقيقياً معقداً على نحو لانهائي وغير قابل للاختزال، إذا وفقط إذا قبلنا وجود علاقة فائقة من «التسمية». سيُجسَّد نظام تسمية كهذا بإلهٍ عالِمٍ بالرياضيات يتحدث اللغة الإنكليزية. لكن كل ما نقوم به هو افتراض وجود لانهاية للوصول إلى لانهاية أخرى.

ترميز العالَم

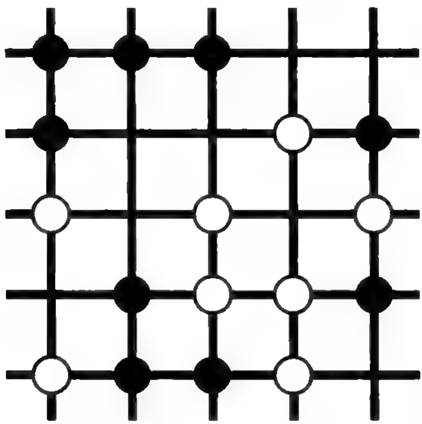
يمكن لنا أن نتخيل على نحو مثالي وجود مجموعة من الحقائق التي تمكننا من الإجابة عن كل سؤال ممكن عن كوننا كله. والسؤال الذي يهمنا هنا: هل الوصف الكامل والأصغر والأكثر كفاءة للعالَم هو وصف منتهٍ أم لانهائي؟

تبدأ الإجابة من معرفة إذا كان العالَم بحد ذاته لانهائياً أم لا. لكننا ناقشنا ذلك في «اللانهايات الفيزيائية» و«اللانهايات الفيزيائية العليا». أما هنا فنركّز على التمييز بين الحالات الثلاث التالية:

1) الكون منتهٍ تماماً، لذا فهو يقبل وصفاً منتهياً كاملاً؛
2) الكون في بعض النواحي لانهائي، لكنه محدّد بالكامل بمجموعة منتهية من الحقائق؛
3) الكون لانهائي ولا يمكن وصفه بالكامل بأي مجموعة منتهية من المجموعات.

الحالة الأولى هي الحالة التي يكون فيها الزمان والمكان منتهيين ومحدودي الكمية. ويكون امتداد الكون منتهٍ ونسيج الزمكان عبارة عن حبيبات، فلا يوجد سوى عدد محدود من المواقع الزمكانية المحتمَلة. ويمكن أن يُعطى وصف كامل للكون بتحديد ما يمكن العثور عليه في كل موقع من المواقع الزمكانية المحتمَلة.

يشبه هذا الكون صورة مصنوعة من نقاط مضيئة، أو لعبة «*GO*»[30] رباعية الأبعاد وكبيرة لكنها منتهية، تأخذ فيها الأحجار البيضاء مكان المادة والأحجار السوداء مكان المادة المُضادة.



الشكل 57

أذكر هنا أن عالِم الرياضيات الألماني إدوارد ويت اعتقد أن الكون محدود بالكامل بالطريقة التي وصفناها تواً، حيث يقول إن هناك $10^{10^{10}}$ موقعاً زمكانياً. واستنتج من ذلك أن أي حديث رياضي عن أعداد أكبر من $10^{10^{10}}$ لا معنى له، بل حتى إنه متناقض. وحاول مراراً استخدام وجهة النظر

30- لعبة «GO» لعبة لوحية تحمل خطوطاً متقاطعة يتبادل فيها اللاعبان وضع أحجار من لونين، الأبيض والأسود، على التقاطعات للإحاطة بأكبر قطر تحدّده أحجار من لون واحد. ومع أن قواعد اللعبة بسيطة، إلا أنها تحتاج تفكيراً استراتيجياً مشابهاً للعبة الشطرنج. (المُترجِمة).

هذه في صياغة دليل مقنع على أن كل الرياضيات التقليدية متناقضة[31]. لكن هذه الأفكار لا تحظى بشعبية بين علماء الرياضيات.

تمثِّل الحالة الثانية حلم العقلانيين. وفيها نجد أن كوننا لانهائي لكن يمكن التقاط جوهره بطريقة أو بأخرى من خلال مجموعة محدودة من الحقائق والقوانين الطبيعية. يعمل العلم باستمرار لمقاربة هذا الوضع بإيجاد قوانين تفسِّر وتلخِّص مجموعة واسعة من الحالات الفردية. مثلاً، بمجرد أن نفهم نموذج البروتون والنيوترون والإلكترون في الذرة، يسهُل علينا فهم جدول العناصر.

يظهَر مثال متطرف لهذا النوع من الأفكار في النظرية الأساسية لآرثر إدينغتون[32]. حاول إدينغتون استخلاص ثوابت فيزيائية، مثل كتلة الإلكترون ونصف قطر الكون، من اعتبارات نظرية مسبقة معينة. وبالرغم من أن جهوده لم تثمر، إلا أن فكرة العثور على بعض الحقائق والقوانين الأساسية التي تمثِّل كل شيء لا تزال فكرة جذابة.

يمكننا أن نتساءل بالطبع عن إمكانية تنبؤ أي نظرية منتهية بكتلة عدد لانهائي من النجوم، أو حتى ترتيب أوراق العشب في حديقة ما. في الواقع، يوجد إحساس معين بعدم إمكانية أي نظرية محدودة أن تصف العالم اللامتناهِ على نحو شامل. وسندرس في الفصل التالي نظرية غودل لعدم الاكتمال، والتي تنصّ على أنه لا توجد نظرية محدودة يمكنها التنبؤ بجميع الحقائق الفعلية حول الأعداد الطبيعية. ولكن إذا كان الكون لانهائياً، فهو يجسِّد المجموعة الكاملة للأعداد الطبيعية، لذا يبدو أن نظرية غودل تقول إنه

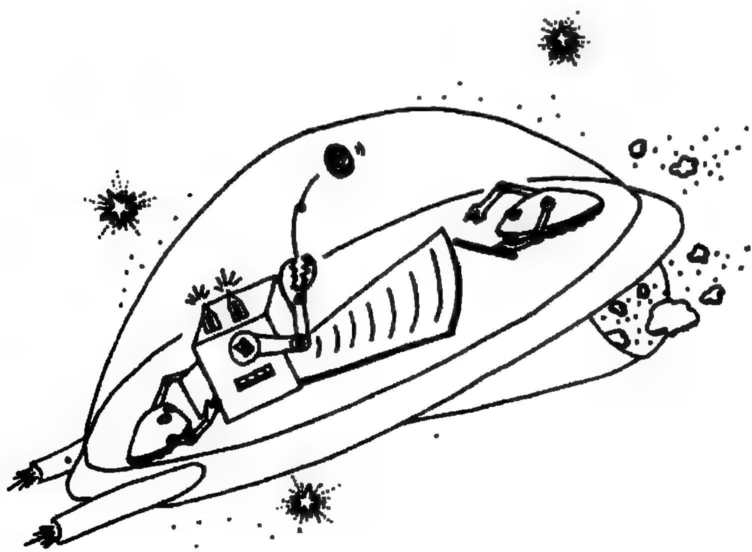
31- لا أعرف بحثاً أوضح فيه ويت فكرته تماماً. من أعماله: Eduard Wette, «Definition eines (relativ vollständigen) formalen Systems konstruktiver Arithmetic», in Jack J. Bulloff, Thomas C. Holyoke, and S. W. Hahn, eds.. *Foundations of Mathematics: Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel* (New York, Springer-Verlag, 1969)

32- Arthur S. Eddington, *Fundamental Theory* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1946). جُمع هذا العمل المنشور بعد وفاته من مخطوطة غير مكتملة.

بالنسبة لأي نظرية محدّدة في الكون، توجد حقائق معينة تتعلق بمجموعات من الأشياء المادية لا يمكن إثباتها حسب النظرية.

لكن دعنا نضع هذه الصعوبة جانباً الآن ونلقي نظرة على طريقة أكثر واقعية قد لا يستجيب الكون فيها لأي وصف محدد. سنعتبر أن الكون يستمر في التوسع إلى الأبد بعد البدء من نقطة تفرُّد واحدة، وهذا احتمال لما يمكن أن يكون عليه كوننا بالفعل. بالنظر إلى المستقبل اللانهائي، وبدون انهيارات مستقبلية قد تفسد كل شيء، يمكن أن نبحث عن اللانهاية غير القابلة للاختزال في شكل من التسلسل العشوائي.

لنفترض أنك بدأت برمي قطعة نقدية وتسجيل 0 للوجه الأول و1 للوجه الثاني. الآن، إذا اعتبرت أن الأرقام التي تدوّنها مسبوقة بفاصلة عشرية، فستحصل على امتداد عشري لعدد حقيقي لانهائي عشوائي، مثلاً: 0.011001010000 1011... ولكن المشكلة أنك لا تستطيع الاستمرار برمي القطعة النقدية إلى الأبد، لذلك لن تتمكن من إنتاج تسلسل لانهائي من الأرقام.



الشكل 58

يمكننا أن نتخيل حلاً لهذه المشكلة. يمكننا بناء آلة لرمي القطعة النقدية. وللحفاظ على استمراريتها بالعمل نزوِّدها بزوج من روبوتات الإصلاح، التي تملك ميزة إصلاح واستنساخ نفسها. ولضمان إمداد هذا الفريق بالطاقة أو المواد الخام، نضعه في سفينة فضاء تجول في جميع أنحاء الكون وتستخرج منه الطاقة والعناصر المطلوبة. إذا كان كوننا أبدياً ويحتوي كمية لا حصر لها من المادة، فلا يوجد سبب نظري يمنع إنشاء هذه الآلة الخالدة لرمي القطعة النقدية.

إذا لم تكن آلة الرمي منحازة، فيوجد احتمال ألا تسجِّل إلا رقم 1 فحسب. لكن الأرجح أن تنتج تسلسلاً من 0 و1 لا يمكن احتواؤه بأي وصف محدود. إن كوناً يمكن أن يحتوي آلة رمي واحدة على الأقل، لا يمكن احتواؤه بأي وصف محدود.

ربما من الأفضل ألا نتعب أنفسنا ببناء آلة كهذه. ترى هل يوجد نوع أبسط من الآلات التي تقوم بعمليات اختيار؟

لنأخذ ذرة الهيدروجين التي تتكون من إلكترون يدور حول بروتون. كما نعلم، توجد الذرة في حالات طاقة مختلفة. وعموماً، تنتقل الذرة إلى حالات أعلى من الطاقة بامتصاص الفوتونات، وإلى حالات أقل بانبعاث الفوتونات. يمكن أن نراقب ذرة هيدروجين معينة، وفي نهاية كل ثانية نكتب إما 1 إذا انبعث منها فوتون أو 0 إذا امتصت فوتون.

لا يوجد سبب لعدم بقاء ذرة الهيدروجين موجودة إلى الأبد، ولكن المشكلة أننا نحن لن نبقى إلى الأبد لمراقبتها وتسجيل حالتها[33]. في البداية قد يميل المرء إلى الاعتقاد بأن ذرة الهيدروجين -سواء راقبها أم لا- ستصدر فوتوناً في كل ثانية أو تمتص آخر. لذلك يبدو أنه في حال كان الزمن لانهائياً، فإن كل ذرة هيدروجين تجسِّد بالفعل تسلسلاً لانهائياً من 0 و1.

33- يجري مؤخراً نقاش بين علماء الفيزياء حول أن البروتونات غير مستقرة، وأن عمرها 10^{30} سنة. إذا كان ذلك صحيحاً، فإن الذرات لن تدوم إلى الأبد. نذكر أن السؤال حول بقاء أي جسم فيزيائي إلى الأبد يختلف عن السؤال إن كان الكون بحد ذاته أبدياً. انظر: Steven Weinberg, «The Decay of the Proton», *Scientific American* (June, 1981), pp. 64-75.

لا تُعتبر العشوائية بديهية مفترَضة على نحو صريح في ميكانيك الكم، ولكن يوجد حدس قوي بأن سلوك ذرة الهيدروجين أمر لا يمكن التنبؤ به من حيث المبدأ. لذا نتوقع أن تولِّد معظم ذرات الهيدروجين أعداداً حقيقية عشوائية. (حاول فيزيائي واحد، وهو بول بينيوف، توسيع ميكانيك الكم بافتراض صريح أن تسلسلات سلوك ذرات الهيدروجين ستكون عشوائية بمعنى عدم إمكانية احتوائها في أي وصف محدود[34].

ولكن لدينا مشكلة كبيرة. وفق ميكانيك الكم الأرثوذكسي (وهو أحد تفسيرات ميكانيك الكم الذي يعتمد افتراضين أساسيين هما الإسقاط والذاتية)، ما لم يراقب شخص ما ذرة الهيدروجين، فلن تقوم الذرة بإصدار فوتون أو امتصاصه بالضرورة. وتسمَّى هذه الحالة بـ«الحالة المختلطة». أي إننا إن لم نضع ذرة الهيدروجين تحت مراقبة ومقاييس خارجية، فيمكن للذرة أن تصدر فوتوناً بنسبة 60%، أو لا تصدره بنسبة 40%، لكنها لا تفعل أياً من ذلك على نحو لا لبس فيه!

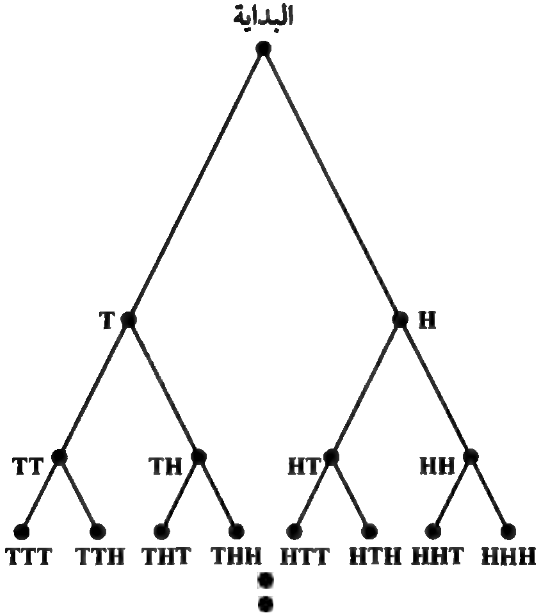
ينطبق الأمر نفسه على أنظمة المراقبة بالعين المجردة مثل آلة رمي القطعة النقدية. تبدأ الآلة بالعمل في حالة معينة موصوفة بدالَّة موجية معينة. تتطور الدالَّة الموجية حتمياً مع مرور الزمن وفقاً لمعادلة شرودنغر. لكن ما لم يوجد شخص ما يراقب الآلة، فإنها ستدخل في حالة تكون فيها نسبة ظهور الصورة 50%، ونسبة ظهور النقش 50%، أي إن نتيجة كل رمية 50/ 50.

يصعب تحديد أي معنى لذلك. فكيف يمكنك رمي قطعة نقدية في الهواء وجعلها تسقط لتُظهِر صورة ونقشاً في اللحظة ذاتها؟ ببساطة لا يمكنك... لأنك تستطيع رؤية كون واحد. لكن إذا استطعت بطريقة ما أن تقسم نفسك إلى شخصين متمايزين في عالمين متمايزين، فيمكنك عندها أن ترى صورة ونقشاً في نتيجة الرمية ذاتها.

إحدى طرق تفسير ميكانيك الكم هي الافتراض بأن الكون ينقسم فعلاً

34- انظر: for instance, Paul A. Benioff, «On the Relationship between Mathematical Logic and Quantum Mechanics», Journal of Symbolic Logic 38, p. 547.

في كل لحظة يجب فيها اتخاذ قرار بين عدة احتمالات. والفكرة أنه إذا لم يكن هناك سبب كافٍ للعالَم لتفضيل اختيار صورة بدلاً من نقش، فعندها سيختار كليهما[35].



الشكل 59

في الحين الذي يواصل الكون انقساماته، يملأ عالَم محتَمل جديد كل عقدة في شجرة من الاحتمالات الثنائية اللانهائية. وبعد عشر رميات، ستوجد آلات رمي في $2^{10}=1024$ كون مختلف، ولكل منها تسلسل محتَمل من 0 و1.

35- وُصفت هذه الفكرة، بفضل هيو إيفرت، في: Brian S. DeWitt and Neill Graham, eds., *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, 1973). انظر أيضاً الفصل الرابع من: Rudolf v.B. Rucker, *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension*. وأيضاً: Douglas R. Hofstadter, «Metamagical Themas», *Scientific American* (July, 1981), pp. 18-30.

الأمرِ الغريب أن مثل هذا الكون المتفرِّع يحتوي على معلومات أقل من كون لا يتفرع. والسبب أنه في حال وجود آلة رمي واحدة فقط، سينشأ تسلسل فريد من 0 و1، وهذا التسلسل -في جميع الاحتمالات- هو ترميز حقيقي عشوائي يصل إلى كمية لانهائية من المعلومات. ولكن في حال انقسام آلة الرمي إلى آلتين في كل مرة ترمي فيها القطعة المعدنية، فلا يوجد آلة واحدة يمكن الإشارة إليها من أجل اختيار مسار من خلال شجرة الاحتمالات الثنائية.

إن الابتداء بآلة جديدة عند كل احتمال جديد، لا يؤدي إلا إلى ملء عقدة من شجرة الاحتمالات الثنائية اللانهائية. ويمكن وصف هذا النوع من الإجراء بالكامل من خلال عدد محدود من الكلمات: «خُذ كل تسلسل محدود ممكن من 0 و1». أما إذا لم يتفرع الكون، فإن الطريقة الوحيدة لوصف ما تفعله هذه الآلة هي تحديد التسلسل الفعلي الذي تولِّده: «0.01101000101000110...». في هذه الحالة يمكننا أن نأمل بوجود ترتيب مخفي للكون يحدّد نهائياً التسلسل الذي نبحثه، لكن هذا الأمل قد لا يتحقق أبداً.

هذه نقطة مثيرة للاهتمام، وتحتاج مزيداً من النقاش. إذا كان كل كون محتمَل موجوداً بالفعل، فما من حاجة للاهتمام بالخصائص المميزة لهذا الكون، بدءاً من أن هناك نملة تمشي على مكتبي الآن، أو أن هناك 79 زهرة متفتحة في حديقة منزلي، إلى وجود كائنات حية في الفضاء أو أن كوننا ثلاثي الأبعاد. إذا كان كل كون محتمَل موجوداً فعلاً، فلا حاجة لشرح أي خاصية. لماذا توجد نملة على مكتبي؟ ما من سبب لذلك، فهناك كون آخر مماثل تماماً باستثناء عدم وجود نملة.

يشبه هذا الوضع المكتبة الشاملة إلى حدٍّ ما. نظراً لأن كل كتاب محتمَل موجود، فلا معنى أن نسأل إذا كان من قام بطبعها فكَّر بمعنى عندما ملأ كتاباً بالأحرف المتكررة «ب ا ج»؛ لقد فعل ذلك لأن عليه طباعة كل احتمال ممكن! ويعني ذلك أن المكتبة الشاملة لا تحتوي على أي معلومات فعلية على الإطلاق، بل على جميع الاحتمالات الممكنة ببساطة.

إذا كان كل كون محتمَل موجوداً فعلاً، سيتحدد الكون ببساطة بالأمر: «فَلْيَكُن كل كون محتمَلاً». في الواقع يحتاج الأمر إلى أكثر من ذلك لإيجاد الكون. يجب أن يُحدّد ما الذي يشكّل «كوناً محتمَلاً». الجواب المحافظ المقبول هو الأخذ بكل الطرق المحتمَلة لملء الزمكان الرباعي الأبعاد بالطاقة والمادة، وذلك بما يتوافق مع معادلات ماكسويل ومعادلات أينشتاين. وماذا عن الأكوان التي لا يمكن أن تُطبَّق فيها قوانين الفيزياء المعروفة لنا، أو الأكوان التي لا يمكن تصورها بفكرنا؟ سنستغرق وقتاً طويلاً للإجابة على مثل هذه الأسئلة.

يصعب علينا أن نصدِّق فعلاً وجود كل كون محتمَل. لكن لنتخيل ذلك: في كل مرة أقود سيارتي، فإني في كون محتمَل ما أتعرض لحادث مميت. لكن هل يمكن أن أبقى حياً في الأكوان الأخرى إن كنت ميتاً في أحدها؟ يبدو الجواب: لا، أنت هو نفسك في كل الأكوان. إن قبول هذه الحقيقة مصدر للتحرر العميق. بمجرد أنك ولدت، فإنك تعرضت للأسوأ بالفعل.

السؤال الرئيس الذي لم تتم الإجابة عليه في نموذج الأكوان المتعددة هو كيف يبدو المرء لنفسه عندما يكون في أحد الأكوان. إذا كان هناك أكوان متعددة، فَلِمَ لا يكون المرء مدركاً لها؟ ربما يمكن ذلك، أو أنت فعلاً مدرك لذلك. إذا تفحصت أنماط تفكيرك قبل أن تتحول إلى ألفاظ، ستجدها مختلفة عن الواقع الجماعي العادي.

على سبيل المثال، إذا قدَّم لي أحدهم وعاء مليئاً بالجوز، قد يبدو للوهلة الأولى يشبه الكهف، أو وجه رجل عجوز، أو غيوماً، أو جبل ماترهورن، أو عين قطة؛ فعندما أرى شيئاً للمرة الأولى، لا يتحدد إلا بقراري ما هو، وقبل هذا القرار، يكون أشياء كثيرة في آن واحد. «آه، نعم، إنه وعاء مليء بالجوز». وبعد أن أقول ذلك، لم يعد لدي إلا واقع واحد في وعيي. ولكن إلى أن أسمِّي الشيء وأقرر ما هو، فأنا في عوالم متعددة.

ربما تكون الأحلام تصورات مختلطة للعديد من العوالم الممكنة. تشكل اللغة والفكر العادي نوعاً من «المِحك» الذي يعيدك دائماً إلى الواقع نفسه. نحن بالتأكيد نترك الواقع العادي في كل مرة ننام فيها. إذا استيقظت

وحيداً وبدون أي ذكريات سوى أحلامك، فهل يمكن لهذه الأحلام أن تتولى تشكيل واقعك؟

على الرغم مما قيل تواً، فلا أعتقد بصحة نظرية الأكوان المتعددة. إن الكون الذي نعيش فيه مبني بقوة على نحو فني، لدرجة يصعب فيها تصديق أنه مجرد احتمال من احتمالات أخرى. يوجد نظام كلي في كوننا يجعل من غير المعقول أن يكون احتمالاً عشوائياً. ربما توجد أكوان متعددة، وربما نتمكن من إدراكها بطريقة ما، لكنني أتوقع أن يكون لكل كون نمط أو جوهر معين.

هذا هو النمط الأساس الذي نحاول الوصول إليه في بحثنا عن الوصف الكامل والأقصر والأكثر كفاءة للكون. لكن إذا كان الكون لانهائياً بالفعل، فيبدو أنه لا يوجد سبب مُلِح لعدم كون النمط الأساس للكون لانهائياً أيضاً. ويقودنا ذلك إلى الحالة الثالثة.

الحالة الثالثة هي عندما يكون الكون لانهائياً وبدون وصف منتهٍ، وتنقسم إلى عدد من الحالات الفرعية وفقاً لمستوى اللانهاية المخصص للكون ولوصفه. يمكن أن يكون الكون قابلاً للعدّ مع وصف محدّد، أو غير قابل للعدّ مع وصف محدّد، أو غير قابل للعدِّ مع وصف غير محدّد. لكن من المربك النظر في هذه الحالات الفرعية هنا، لذا سنكتفي بالتميز بين الحالتين الثانية والثالثة، بالنظر إلى بعض الأمثلة الملموسة عن كيفية ترميز الكون كله.

يوجد نهج بسيط يتضمن تخيل الكون مصنوعاً من مجموعة نهائية أو لانهائية من الجُسيمات m_0، m_1، m_2، ... وأنه في كل مرة t يكون كل من هذه الجُسيمات نوعاً محدداً (إلكترون، كوارك، فوتون، ...) وله موقع واتجاه وعزم اندفاع محددان. ومن الواضح أن كل هذه المعلومات تشكّل مجموعة من الأعداد الحقيقية التي لا حصر لها على الإطلاق. وباستخدام تقنية الخلط من القسم الفرعي الأخير، يمكن دمج كل هذه الأعداد الحقيقية لتشكيل عدد حقيقي واحد $U(t)$ الذي يمثّل وصفاً شاملاً لحالة الكون في اللحظة t.

بعد انتشار نظرية الكم وأبحاثها، أصبحنا نتساءل عن وجود مثل هذا العدد $U(t)$، خاصة وأننا نعلم أنه لا يمكن أبداً قياس موضع أي شيء بدقة لانهائية، ولا سيما إذا كان عزم الحركة محدداً بدقة لانهائية. لكن بالنسبة

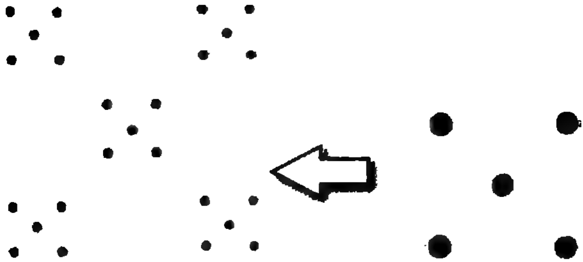
للفيزيائيين في القرن التاسع عشر، لم تكن مثل هذه الاعتراضات موجودة. وافترضوا أنه حتى لو لم نتمكن من قياسه، فإن العدد $U(t)$ موجود في كل لحظة t. وفعلاً، افترضوا أنه إذا تمكنا من الحصول على $U(t)$ في اللحظة t_0، فيمكن حساب كل $U(t)$ في أي وقت وفق قوانين نيوتن للحركة. لذا فبالنسبة للحتمية القديمة، يمكن أن نعطي وصفاً كاملاً للكون من العدد الحقيقي الوحيد U.

إن تأمل أوراق شجرة كبيرة، أو الخطوط على كف اليد، أو السماء المليئة بالغيوم، يقنعنا بسهولة أن عدداً يصف الكون مثل U سيكون وصفه المحدد -إن وُجد- طويلاً للغاية. وأعتقد أن أقصر عدد طبيعي قد يرمز لكيفية إنشاء U يجب أن يكون أطول من العدد u_0 الذي ذكرناه في مفارقة بيري.

تظهر مشكلة جانبية مثيرة للاهتمام هنا. إذا وُجد العدد U الذي يصف الكون بدقة تامة، فمن المحتمل أن تمثيله بطريقة تسجيل الأعداد في كتب ستؤدي إلى عدد من الكتب التي لا يمكن للكون أن يحتويها! بالطبع، أفضل تمثيل للعدد U هو الكون نفسه، لذا فإن تمثيلاً واحداً على الأقل يوجد فعلاً. ولكن هل نأمل أن نصل إلى نموذج حاسوبي أو كتاب يمكن وضعه في الجيب ويصف الكون بأكمله؟ أجل، إذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى اللانهاية.

السبب في ذلك أن وجود جُسيم هو الأصغر في الكون وغير قابل للقسمة، يعني أن أي جسم في الكون سيحوي جُسيمات أقل من الكون، وبالتالي لا يمكن لجسم من الكون أن يعمل كنموذج قياس للكون كله. أما في حال عدم وجود جُسيم أصغر نهائي، بل كانت المادة قابلة للقسمة إلى ما لانهاية، فعندئذ يمكن لأي جسم من الكون أن يحتوي على جُسيمات الكون نفسها على نحو لانهائي. لذلك يمكن لجزء من الكون أن يماثل الكون بأكمله.

دعونا نصف طريقة لنمذجة هذا الاحتمال. لننظر إلى الشكل 59. يمكن استخدام هذا النمط كقاعدة لتسلسل لانهاية له من الأنماط المتماثلة بالحجم. نقوم بذلك عن طريق استبدال كل نقطة بنمط كامل لنحصل على نمط جديد، ثم استبدال كل نقطة في النمط الجديد بنمط كامل، وهكذا.



الشكل 59

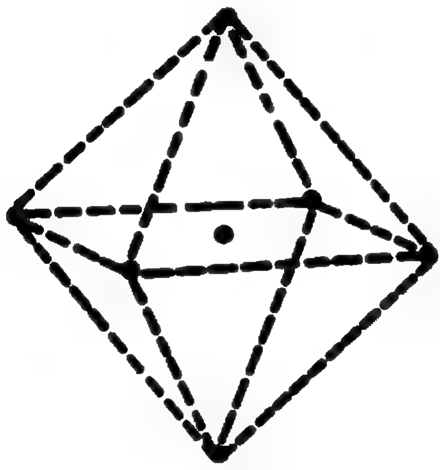
في الشكل 60، نجد صورة من النمط الهندسي المتكرر الذي قدَّمه ماندلبروت في نظرية «الكُسيرية». إذا نُفذت العملية لعدد لانهائي من المرات، نحصل على ما يُسمَّى كُسير فورنييه، نسبة إلى الفيزيائي الإيرلندي إدموند فورنييه الذي ابتكر نمطاً مشابهاً في عام 1907 لوصف ما اعتقد أنه ترتيب المجرات في الفضاء.

الشكل 60

نحصل من ذلك على كون يبدو للوهلة الأولى أنه يتكون من خمس كتل، ويكشف التدقيق في كل كتلة خمس كتل فرعية أصغر، والتي بدورها

تكشف عن خمس كتل فرعية أصغر أخرى، وهكذا. وبعبارة أخرى، يتكون هذا الكُسير من خمس مجموعات تتكون من خمس مجموعات تتكون من خمس مجموعات... وتتكرر هذه العبارة أوميغا من المرات. ولأن إقصاء عدد قليل من مرات التكرار لا يغيّر شيئاً، فمن الواضح أن كل هذه المجموعات تملك البنية الداخلية نفسها للكون بأكمله.

يمكن أن ننفذ هذا الكُسير بثلاثة أبعاد من خلال إضافة نقطتين للنمط الأساس، إحداها فوق النقطة المركزية والأخرى تحتها، لنحصل على مجسَّم ثماني. ونحصل على الكُسير النهائي بالاستبدال اللانهائي لكل نقطة بمجسَّم ثماني أصغر.



الشكل 61

الفكرة أنه إذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى اللانهاية، فمن الممكن نظرياً أن توجد جُسيمات تمثّل نسخاً طبق الأصل عن الكون بأكمله. وإذا اختار المرء تعريف هذه الجُسيمات بالكون بأكمله، تظهر حالة المقياس الدائري للتفرعات «اللانهائية في الصِّغَر». نلاحظ أيضاً أنه حتى لو لم يكن هناك دوران باتجاه معكوس (أي أن تُحتوى المجموعات في مجموعة أكبر، والتي تحتويها مجموعة أكبر، والتي تحتويها...)، سيحتوي الكون وفق نمط فورنييه عدداً لانهائياً من المجموعات. ومن السمات غير الطبيعية

لهذا النموذج أنه منتهٍ ومحدود، من حيث وجود مجموعات خارجية تحيط بالمجموعات الداخلية.

إذا حاولنا معالجة هذا عن طريق تقويس الفضاء إلى مجال فائق (وهو مجموعة النقاط التي تبعد المسافة ذاتها عن نقطة معينة تُدعى المركز)، فمن الصعب أن نرى كيف ستنحني المجموعات في هذا المجال الفائق، لأن الفضاء نفسه ينقص بُعداً واحداً عن الفضاء الذي ينحني فيه. (فالكرة الثلاثية الأبعاد لا تُحتوى إلا في فضاء رباعي الأبعاد.) إحدى طرق الخروج من هذه المشكلة هي اعتبار الفضاء ذي أبعاد ناكصة على نحو لانهائي، أي إنه مجال فائق فائق فائق...، لكن هذه الفكرة لم تُدرس من قبل.

على أي حال، كنا نتحدث عن طرق ترميز الكون، ومسألة ما إذا كانت هذه الرموز محدودة أم لانهائية. وكان الاستطراد الذي انتهى تواً يتعلق بمسألة إمكانية احتواء الكون لنموذج أصغر منه.

ناقشنا طريقة الحتميات الفيزيائية لترميز الكون بعدد حقيقي واحد. كما تبدو الطرق الفيزيائية غير الحتمية تسمح عموماً بترميز حالة الكون اللحظية بعدد حقيقي، وبترميز تاريخه بأكمله بمجموعة لا تُحصى من الأعداد الحقيقية (باعتبار كل لحظة عنصراً في المجموعة). يمكن طَيُّ هذه المجموعة بدورها بعدد حقيقي كوني واحد U، والذي يمكن أو لا يمكن ترميزه بواسطة صيغة سحرية محدودة فعّالة.

هناك شيء غير طبيعي في محاولة وصف الكون بجُسيمات أولية، خاصة في ضوء حقيقة معرفتنا أن وجود هذه الجُسيمات مُستنتَج وليس مؤكداً. يوجد عدد من الحقائق التي تقترح بأن البيانات التي لدينا حول هذه الجُسيمات هي إلى حدٍّ ما، صنيعة العقل. ربما من الأفضل أن نبني وصفنا للكون على الفكر والخبرة البشريين الفعليين.

إن ما سبق يعني أن نصنع قائمة بكل الأشياء في الكون التي يمكن لنا اكتشافها. على سبيل المثال، أبدأ بذكر القلم الذي أمامي. سأصفه بأنه أسود ولامع، لكن عليَّ الآن أن أشرح ما يعنيه «أسود». أحد مكوِّنات معنى «أسود» ترتبط بالتأكيد بفكرة «ليل». وللتعبير تماماً عن «الليل»، يجب أن

أعطي أمثلة محددة عن الليالي المختلفة التي مررت بها. ليلة عام 1966 وقفت مع سيلفيا على شرفة مطلة على البحر المتوسط. يجب أن أخبركم عن سيلفيا، ولدت في بودابست، وهذه خريطة المدينة. الخريطة هي نوع من الرسم التوضيحي لمكان يُرسم بالقلم. قلم؟ إنه شيء نكتب به وأمامي واحد الآن. إنه أسود ولامع...

الحقيقة إن أي محاولة لوصف كائن أو تجربة ما على نحو كامل اعتماداً على أشياء وتجارب أخرى، تجعلنا نستخدم المزيد والمزيد من الأشياء، بما في ذلك تكرار مظهر الكائن الذي نصفه في الأصل.

لا يوجد تناقض أو نكوص حقيقي هنا، لكن يبدو أن التجربة تشبه طبقاً من قطع الحلوى المتلاصقة ببعضها البعض، وفي كل محاولة لالتقاط قطعة منه، تنسحب كل القطع. ربما من المستحيل وصف أي شيء في العالم وصفاً شاملاً بدون ذكر أي شيء آخر أيضاً. وبغض النظر عما ستبدأ به، فإنك ستنتهي بذكر الندبة على إصبعي السبابة اليمنى، أو شكل أول بقع شمسية ظهرت عام 1292 قبل الميلاد، أو المرض الذي هاجم إيفان الرهيب أول قيصر لروسيا، أو طبيعة المجرات في سديم الدوامة.

كيف يمكن استيعاب كل هذا التنوع في وحدة رياضية؟

تتمثَّل إحدى الطرق بجعل الوصف مجموعة من الكتب في المكتبة الشاملة، والتي تتألف من وصف حقيقي باللغة الإنكليزية لبعض جوانب الكون. يقول لودفيغ فيتغنشتاين: «العالم هو كل شيء صحيح»، وسنعتبر الوصف يضمّ كل الأوصاف الإنكليزية للأشياء الصحيحة بالفعل. يشكِّل الوصف مجموعة من الكتب، والتي يمكن عرضها كمجموعة من أرقام الرموز. يمكن اعتبار الوصف نفسه مجموعة لانهائية من الأعداد الحقيقية، والتي يمكن ترميزها كلها كعدد حقيقي واحد يُسمَّى D.

لا يتسبب الاقتصار على اللغة الإنكليزية بالكثير من المشاكل، وخاصة إذا اشتمل الوصف على شرح لما تعنيه كل كلمة اعتماداً على الكلمات الأخرى. وبقدر ما تشكِّل المعرفة المادية سهلة المنال جزءاً من «الأشياء الصحيحة» فحسب، فإن العدد D يملك معلومات أكثر من U.

نتساءل مجدداً عما إذا أمكن وصف العدد D بطريقة ما. على سبيل المثال، ماذا لو اتضح أن D هو $1/\pi$! يأمل الأشخاص الذين يعتقدون بوجود جواب نهائي لـ «كل شيء» بمثل هذا الأمر. لكن أي شخص لمس التنوع اللانهائي في الطبيعة يشعر -بل ويأمل- أنه لا يمكن أبداً التقاط الكون كاملاً في أي مخطط محدود، وأن نمط الكون، بمعنى أساس، عشوائي وغير قابل للتسمية.

بذلك يبدو لنا أن الواحد المحدد والمنتهي لدى أفلاطون وبارمينديس لا يستحق العبادة أكثر من جهاز حاسوب فائق. في مقطع مروِّع من رواية «موبي ديك»، يقف القبطان آهاب على سطح السفينة خلال عاصفة رعدية، ويصرخ قائلاً لإله زملائه البحارة:

«وراءك شيء لا يمتزج بغيره أيتها الروح الوضَّاءة، ليست أبديتك إزاءه إلا زمناً، ليست قدرتك على الخلق إزاءه إلا آلية؛ من خلالك، من خلال نفسك الملتهبة، تراه عيناي المحرورتان رؤية غائمة»[36].

36- Herman Melville, *Moby Dick*, Chapter 119 (New York: New American Library, 1961), p. 477.

ما هي الحقيقة؟

لم يكن العصر الذهبي للفلسفة اليونانية بعيداً جداً عن زمن المسيح. بيلاطس البنطي هو أحد الشخصيات اليونانية-الرومانية القليلة التي تظهر في الأناجيل. في ضوء هذه الحقيقة، يكتسب المقطع التالي من إنجيل يوحنا أهمية معينة باعتباره مواجهة نموذجية بين طريقتي التفكير الروحانية والعقلانية:

«فَقَالَ لَهُ بِيلاَطُسُ: «أَفَأَنْتَ إِذاً مَلِكٌ؟» أَجَابَ يَسُوعُ: «أَنْتَ تَقُولُ: إِنِّي مَلِكٌ. لِهذَا قَدْ وُلِدْتُ أَنَا، وَلِهذَا قَدْ أَتَيْتُ إِلَى الْعَالَمِ لأَشْهَدَ لِلْحَقِّ. كُلُّ مَنْ هُوَ مِنَ الْحَقِّ يَسْمَعُ صَوْتِي». قَالَ لَهُ بِيلاَطُسُ: «مَا هُوَ الْحَقُّ؟». يوحنا 18(37-38).

يؤدي مفهوم الحقيقة إلى عدد من الصعوبات المنطقية. إحدى أبرز هذه الصعوبات هي مفارقة الكذاب، والمعروفة أيضاً باسم مفارقة كريت أو مفارقة إبيمينيدس. كان إبيمينيدس رجلاً عاش في جزيرة كريت في زمن ما قبل المسيح. ويُعتقد عموماً أن القديس بولس كان يشير إليه بقوله في المقطع التالي: «قَالَ وَاحِدٌ مِنْهُمْ، وَهُوَ نَبِيٌّ لَهُمْ خَاصٌّ: «الْكِرِيتِيُّونَ دَائِماً كَذَّابُونَ. وُحُوشٌ رَدِيَّةٌ. بُطُونٌ بَطَّالَةٌ». هذِهِ الشَّهَادَةُ صَادِقَةٌ». رسالة بولس الرسول إلى تيطس 1(12-13)[37].

تكمن المفارقة في قول إبيمينيدس -الذي هو نفسه من جزيرة كريت- «الكريتيون جميعهم كاذبون» بأنه لكي يكون صادقاً فيجب أن يكذب!

37- اكتشفت ذلك في: Alan Ross Anderson, «St. Paul's Epistle to Titus», in: Robert L. Martin, ed., *The Paradox of the Liar* (New Haven: Yale University Press, 1970), pp. 1-11.

ويمكن إيضاح مفارقة الكذاب الدائرية بالتفكير بالجملة (أ): هذه الجملة خطأ. أي إن الجملة (أ) تقول إن (أ) خطأ: فإذا كانت (أ) صحيحة فإن (أ) خطأ، ولكن إذا كانت (أ) خطأ فمن الصحيح أن نقول إن (أ) خطأ، وبالتالي فإن (أ) صحيحة.

هذه المفارقة محبِطة بالتأكيد. إحدى طرق الخروج منها هي ببساطة إنكار حقيقة أن (أ) إما صحيحة أو خطأ، والتأكيد أن (أ) ببساطة عبارة ليس لها قيمة حقيقية محددة. تبدو الجمل التي لا معنى لها أمراً مألوفاً. فجُمل مثل «الفضائل الإنسانية الثلاث هي القوة والحكمة والشجاعة» أو «وزن سوبرمان 80 كغ»، هي جمل نتردد في تسميتها صحيحة بالتأكيد أو خاطئة بالتأكيد. لِمَ إذاً لا يمكن أن تكون مفارقة الكذاب جملة مشابهة لذلك؟

يمكن إثبات أن طريقة الخروج هذه غير ممكنة بما يلي: لنفكر في الجملة (ب): هذه الجملة ليست صحيحة.

إن كل جملة إما أن تكون صحيحة أو غير صحيحة. إذا كانت (ب) صحيحة، فهي غير صحيحة. وإذا كانت (ب) غير صحيحة، فهي صحيحة. إن (ب) صحيحة وغير صحيحة في الآن نفسه، وهذا تناقض.

يجب بالتأكيد على أي جملة أن تكون إما صحيحة أو غير صحيحة، ونقصد بـ«غير صحيحة» أوسع المعاني الممكنة مثل (كاذبة، بدون معنى، متناقضة، من المستحيل التحقق منها). لذا يبدو من غير النزيه محاولة الهروب من المفارقة بإنكار ذلك.

الأفضل من ذلك أن نحاول إنكار أن (ب) جملة. إن (ب) تحوي أمراً غريباً بالتأكيد، فهي تشير إلى نفسها بـ«هذه الجملة». الآن، إذا استبدلنا إشارتها لنفسها بالجملة ذاتها كاملة، سيؤدي تكرار ذلك إلى نكوص لانهائي:

هذه الجملة ليست صحيحة.

«هذه الجملة ليست صحيحة» ليست صحيحة.

««هذه الجملة ليست صحيحة» ليست صحيحة» ليست صحيحة.

«»... «ليست صحيحة» ليست صحيحة» ليست صحيحة.

نلاحظ أن الجملة الأخيرة تتكون من أوميغا تسلسل من اليسار إلى اليمين، وأوميغا تسلسل من اليمين إلى اليسار.

لا يوجد في الواقع أمر سيئ حول النكوص اللانهائي. أشار جوزيه رويس إلى أن بإمكاننا تجنب النكوص اللانهائي من خلال النظر إلى الموقف بطريقة شكلية. إن الجملة (ب) التي تقول «(ب) ليست صحيحة» لا تحوي لانهاية؛ فالنكوص اللانهائي لا يظهر إلا عند محاولتنا إقصاء الرمز (ب).

يمكننا أن نتذكر هنا موقفاً مشابهاً في قسم «اللانهاية ومشهد العقل»، عندما ناقشنا عقلاً يتكون من الوعي الذاتي البحت. وصُمِّم ذلك العقل من مجموعة *M* عنصرها الوحيد *M*. يمكن فهم جوهر المجموعة *M* على الفور ودفعة واحدة، ولكن إذا حاولنا إزالة الرمز «*M*» سنحصل على التعريف الناكص إلى اللانهاية {{{......}}}.

كان الاعتقاد التقليدي هو أن خط التفكير المؤدي إلى نكوص لانهائي هو خط تفكير غير صالح[38]. يقوم هذا الاعتقاد على أن فكرة أن اللانهاية متناقضة بطبيعتها وغير متماسكة. لكن كانتور خلَّصنا من هذا الخوف الخرافي من اللانهاية. وفي عام 1893، نشر فرانسيس برادلي كتابه المشهور «المظهر والواقع»، والذي يُظهِر أن أي جملة تقريباً تؤدي إلى نكوص لانهائي عند تحليلها بدقة[39].

يمكن شرح حجة برادلي بما يلي: نعتقد عادة أن العالم يتكوّن من أفراد *a*، *b*، ...، الذي يرتبطون ببعضهم البعض بعلاقات مختلفة *P*، *R*، ... وعلى سبيل المثال، إن القول: الكائن *a* على يسار الكائن *b* يعني وجود علاقة

38- يوجد فصل مثير للاهتمام حول الدور التقليدي للنكوص اللانهائي في: Passmore, *Philosophical Reasoning* (New York: Basic Books, 1969). انظر أيضاً: Borges, «Avatars of the Tortoise», in *Labyrinths*, pp. 202-212.

39- Francis Herbert Bradley, *Appearance and Reality* (New York: Macmillan, 1899). Josiah Royce, *The World and the Individual, First Series*. والذي يقدِّم نقاشاً مفصلاً عن أفكار برادلي.

معينة L = (على يسار) مُحقَّقة بالكائنين المذكورين وفق هذا الترتيب. ويُختصر ذلك بـ $L(a, b)$.

يمكننا أن نفكر بالعلاقات على أنها كائنات ذات ترتيب أعلى، والتي يمكنها بدورها أن ترتبط بعلاقات ذات ترتيب أعلى مع علاقات وكائنات أخرى. يعني ذلك أنه إذا ارتبط الكائنان a وb بالعلاقة L، $L(a, b)$، فيمكن أن ترتبط كل من a وb وL بعلاقة ذات مرتبة أعلى وهي S، $S(L, a, b)$. وهكذا.

وبالتأكيد، لا يتوقف ذلك، وندخل في نكوص لانهائي:

$$L(a, b)$$

$$S(L, a, b)$$

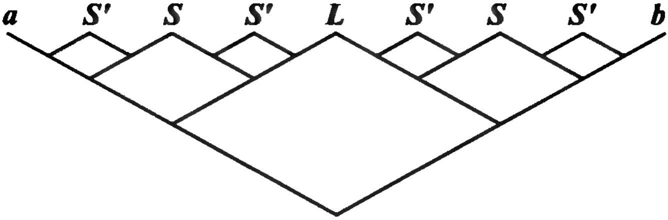
$$S'(S, L, a, b)$$

$$S''(S', S, L, a, b)$$

$$\ldots S'', S', S, L, a, b)$$

نجد مما سبق أن جملة بسيطة وغير مشكوك بها مثل «الكائن a على يسار الكائن b» يمكن أن تؤدي إلى نكوص لانهائي؛ فبرادلي أظهر لنا أن كل جملة قد تكون كذلك. لذا لا يمكننا دحض مفارقة الكاذب بادعائنا أنها «ليست جملة لأنها تؤدي إلى نكوص لانهائي، وبالتالي لا حاجة لأن تكون صحيحة أو غير صحيحة».

قبل المضي قدماً، لنُزِل الرمزية ونحاول أن نرى ما فعله برادلي حقاً. يبدو أن حدسه الأساس هو عدم إمكاننا ربط أي شيء بشيء آخر بدون علاقة وساطة. ويمثِّل الشكل 62 نوعاً من الكُسيرية التي نحصل عليها عند التصور الهندسي للعلاقات L وS وS'...



الشكل 62

إذا أهملنا قليلاً قَلق برادلي من كيفية توحيد العناصر المختلفة للغة في جملة، يمكننا أن نفكر فيما تقوله الجمل في نكوصها اللانهائي.

$L(a, b)$ تقول إن a على يسار b.

$S(L, a, b)$ تقول إن «a على يسار b» صحيحة.

$S'(S, L, a, b)$ تقول عن «« a على يسار b» صحيحة» صحيحة.

... وهكذا.

كما اعتقد برادلي أنه لتأكيد جملة ما، يجب تأكيد كل نكوصها اللانهائي. أي تأكيد أوميغا تسلسل من اليمين إلى اليسار، وأوميغا تسلسل من اليسار إلى اليمين.

هل يمكننا تجنب النكوص اللانهائي بإصرارنا أنه بمجرد قولنا لجملة ما، فإن قولنا «إنها صحيحة» لا يضيف شيئاً؟

مثلاً، الجملة «هذه الجملة صحيحة». إذا قمنا بتحليل هذه الجملة كما فعلنا مع سابقاتها، سنحصل أيضاً على أوميغا تسلسل من اليمين إلى اليسار وأميغا تسلسل بالاتجاه المعاكس. لكن هذا التكرار لا يضيف شيئاً للجملة ولا يغيِّر فيها شيئاً. كما لا يفيد تساؤلنا عما إذا كانت صحيحة أم لا؛ فإذا كانت صحيحة فهي صحيحة، وإذا كانت خاطئة فهي خاطئة. ولا يضيف ذلك أي معنى.

بالعودة إلى خط التفكير الأساس، يجب أن نميِّز بين أمرين. لفهم جملة «a على يسار b»، نحتاج لمعرفة مكان كل من a وb ومعنى «يسار». لكن

لفهم «صحيح أن a على يسار b» نحتاج لمعرفة ما يعنيه «صحيح»، وهذا أمر صعب.

في الواقع، لا يوجد وصف كامل نهائي للحقيقة. الحقيقة غير قابلة للتحديد. كما سنرى، سيكون هذا طريقنا للخروج من مفارقة الكاذب. طالما أن الحقيقة غير قابلة للتحديد، فلا يمكن استخدام كلمة «حقيقة» بمثابة المفهوم الكامل للحقيقة، لذا فإن الجملة «هذه الجملة ليست صحيحة» لا تعني حقاً ما اعتقدناه، وبذلك نتجنب المفارقة.

دعونا نلقي نظرة على دليل ألفريد تارسكي عام 1934 بأن الحقيقة غير قابلة للتحديد[40]. فكرة الدليل بأنه إذا كنا في المكتبة الشاملة، ستحتوي الكتب على جمل، وستكون بعض هذه الجمل صحيحة باعتقادنا. مثلاً، إذا كان النص B_{5389} يقول «الثلج أبيض»، فنعتبره كتاباً حقيقياً، ونختصر ذلك بـ $T(B_{5389})$.

عموماً، نقول $T(B_n)$ إذا كان B_n صحيحاً. ونتذكر أننا أشرنا في القسم الفرعي السابق إلى مجموعة كل الكتب الحقيقية بـ«الوصف». وإذا سألت من سيقرّر أي الكتب صحيحة، فندع ذلك الأمر للإله في الوقت الحالي.

سنثبت الآن أنه ما من وصف نهائي للإشارة «صحيح». وما من علّة نهائية للكتب التي سيقول عنها الإله إنها صحيحة.

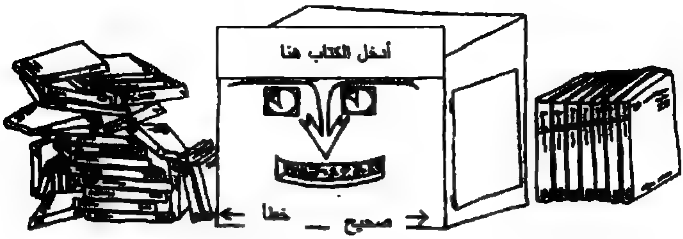
لنفترض وجود «آلة الحقيقة» كما في الشكل 63. تقوم هذه الآلة بمسح صفحات الكتاب الذي يُدخل إليها. إذا كان الكتاب صحيحاً، ستضعه في صف مرتب مع الكتب الحقيقية الأخرى. وإذا لم يكن صحيحاً، ستبصقه إلى كومة خردة التاريخ.

ليكن لدينا الكتاب الذي يقول: «توجد آلة الحقيقة. ولن تقول هذه الآلة إن هذا الكتاب حقيقي».

نعرف جميعاً ما سيحدث عند إدخال هذا الكتاب إلى الآلة. سنراها تحطم نفسها. لا يمكن للآلة أن تقول إن الكتاب خاطئ، فعندها سيكون ما كُتِب فيه صحيح. والعكس صحيح، فلا يمكنها أن تقول إنه صحيح، لأن

40- إن برهان تارسكي هو مجرد تنقيح لبرهان نظرية عدم الاكتمال لـ«غودل»، والتي سنناقشها في الفصل التالي.

ذلك يجعل ما كُتِب فيه خطأ. لذا سيعلق الكتاب في الآلة، ولن تستطيع الآلة أن تجيب بـ «نعم» أو «لا».



الشكل 63

هنا تظهر لنا حقيقة مهمة: إن الكتاب حقيقي، لكن الآلة -كما يقول الكتاب- لن تقول إن هذا الكتاب حقيقي أبداً. ونحن الموجودين خارج الآلة نستطيع أن نرى ذلك بوضوح، بالمعنى المطلق وغير القابل للتحديد لكلمة «حقيقي». لكن «آلة الحقيقة» لا يمكن أن تعرف هذه الحقيقة!

أثبتنا الآن أنه لأي «آلة حقيقة» محدودة، يوجد كتاب محدود حقيقي ولا يمكن للآلة أن تتعرف على هذه الحقيقة. وهو الكتاب الذي يقول «لن تقول الآلة إن هذا الكتاب صحيح»، والذي سيتسبب بدخول الآلة بحلقة نكوص لانهائية ولن تقول أي شيء مرة أخرى.

لا يمكن أن يوجد وصف محدد لآلة الحقيقة التي تتعرف على جميع الكتب الحقيقية. لا يوجد روبوت يمكن أن نبنيه لنصل إلى الوصف من المكتبة الشاملة. الحقيقة غير قابلة للتعريف.

أصبح حلّ مفارقة الكاذب في متناول أيدينا الآن. إن الجملة «هذه الجملة ليست صحيحة» ليست كلاماً ذا معنى في الواقع. ويجب إلحاق بعض الوصف لما يُقصد بـ «صحيحة»، لتصبح الجملة «هذه الجملة ليست صحيحة وفقاً للوصف (كذا) من الحقيقة». بالنسبة للوصف، لن تكون الجملة صحيحة أو غير صحيحة، لأن الوصف لا يعطي قراراً بالنسبة للجملة. لذلك ليس هناك أي مفارقة.

من ناحية مفهوم الحقيقة المطلق، ولكن غير القابل للقياس، فإن الجملة صحيحة. يمكن الحصول على أوصاف أفضل وأفضل للحقيقة، لكن ما من وصف محدّد يمكن أن يحيط أبداً بالمفهوم غير القابل للتسمية لما نشير إليه بالرموز ح-ق-ي-ق-ة.

كما أن وصفاً ما لا يمكن أن يقرّر على نحو صحيح دائماً صحة عبارات حول هذا الوصف نفسه. لكن من الممكن التوصل إلى وصف أفضل يوضِّح حقيقة عبارات حول الوصف السابق إضافة إلى قدرته على تحديد كل ما يحدده. لكن كل ما سنصل إليه هو تسلسل لانهائي من الأوصاف، وسنجد أن نكوص برادلي أمر لا مفرّ منه.

من الممكن بالطبع إنكار وجود أي مفهوم مطلق للحقيقة، والإصرار أن كل ما يمكن الوصول إليه هو تعريفات أفضل للحقيقة، تتجه نحو حدٍّ خيالي تماماً. تماثل وجهة النظر هذه الرأي الذي يعترف بوجود أعداد طبيعية كبيرة للغاية، لكنه ينكر وجود تسلسل لانهائي من هذه الأعداد. وتتشابه أكثر مع الرأي القائل بوجود مجموعات لانهائية مختلفة، لكنه ينكر وجود الفئة الموحدة الجامعة لكل المجموعات في مطلق كانتور. وسنناقش هذه الاختلافات في القسم «الواحد والكِثرة» في الفصل الخامس.

سيلاحظ بعض القراء أن هناك نقاط ضعف في الدليل على أن الحقيقة غير قابلة للتعريف. فقد يتساءل المرء كيف يمكن أن ننشئ كتاباً يتضمن إشارة إلى نفسه بدون ذكر العبارة الغامضة «هذا الكتاب». وقد يتساءل عما إذا كان الدليل دائرياً أو مضللاً بطريقة ما، لأنه يذكر مفهوم الحقيقة غير القابل للتعريف على أنه مُثبَت. في الفصل التالي وفي التدريب الثاني، سأوضح كيف يمكن إنشاء نسخة من هذا الدليل لا يرقى إليها الشك.

خلاصة القول، أظهرنا أن الحقيقة مفهوم لا يمكن تعريفه بدقة وفق طريقة محدودة. وبسبب ذلك، يمكننا التأكيد على أن الجملة «هذه الجملة ليست صحيحة» ليست بجملة حقيقية، وبالتالي لا تحتاج لتكون صحيحة أو غير صحيحة. لا يُعتبر ما سبق حلاً مُرضِياً، لأننا نشعر أن مجموعة من

الكلمات التي ليست صحيحة أو غير صحيحة يجب أن يُقال عنها غير صحيحة. ومثل جميع المفارقات الجيدة، تقاوم مفارقة الكاذب أي حلّ نهائي لها وتصمد لتكون «فجوة أبدية من اللامنطق».

خلاصة

تلخص الأعمدة الثلاثة في الجدول التالي الأقسام الثلاثة في هذا الفصل. في كل حالة نبدأ بمفهوم لانهائي مألوف، ثم نصل إلى مفارقة. تتشابه هذه المفارقات في أنها تتعلق جميعها بالدلالات، أي إن كل مفارقة تركِّز على عملية تحديد معنى تسلسل الرموز.

إحدى طرق حلّ هذه المفارقات هي الإصرار على أن الكلمة المفتاحية («الاسم»، قابلية التسمية»، «الحقيقة») تشير إلى المفهوم المطلوب لكنها غير قادرة على تسميته أو تعريفه بالدقة المطلوبة، ومن ثم التأكيد على أن العبارات في الصف ب) بدون معنى. لكن لا يمكن أن نتوقف هنا فحسب. ليس من المُرضي «حل» المفارقات من خلال رفضها على أنها بدون معنى. وأتذكر هنا تعليق الممثل الهزلي سام لويد على طريقة الإسكندر الأكبر في حلّ العقدة الغوردية، والتي تقول الأسطورة إن العرَّافين تنبؤوا بأن من يفك عقدة الحبل المعقودة إلى عمود في معبد غورديون، سيملك آسيا. فجاء الإسكندر وحلَّها بضربة من سيفه.

يُقال إن الإسكندر الأكبر قام بعدة محاولات فاشلة لحل العقدة، إلى أن غضب واستفزته رغبته في النجاح، فاستلّ سيفه وقطع الحبل، قائلاً: «هذه هي الطريقة المنطقية للحصول على شيء تريده فعلاً». الغريب أن بعض المطَّلعين على القصة وفكرتها التافهة، يؤيدونها ويفخرون بما فعله الإسكندر، لدرجة أنهم عندما يتغلبون على بعض الصعوبات يهتفون: «قطعت العقدة الغوردية!»[41].

41- Sam Loyd, *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* (Martin Gardner, ed., New York: Dover, 1959), pp. 116–117.

في الصف ج) أخذنا كل المفارقات واستبدلنا الكلمات المفتاحية الغامضة بتقريب دقيق (M_1 لـ«اسم»، M_2 لـ«قابلية التسمية»، M_3 لـ«الحقيقة»). ويقصد بـM أي نظام قابل للوصف بدقة، كجهاز حاسوب أو حتى إنسان.

الفكرة الرئيسية أن ما من M تعمل على نحو صحيح دائماً. ستؤدي بعض المدخلات إلى تشغيل النظام إلى الأبد بدون نتيجة، أي سيدخل في حلقة لانهائية.

أ)	الأعداد الطبيعية	الأعداد الحقيقية	الحقيقة
ب)	ليكن العدد بيري هو العدد الطبيعي الأول الذي لا يمكن أن يكون اسمه أقصر من هذه الجملة	ليكن العدد ريتشارد هو العدد الحقيقي الذي نحصل عليه من جميع الأعداد الحقيقية قطرياً	هذه الجملة ليست صحيحة
ج)	وصف النظام M_1: اطبع أول عدد طبيعي لا يمكن لاسمه أن يكون أقصر من هذه العبارة	وصف النظام M_2: قم بتوليد العدد الحقيقي المكوّن من قطر كل الأعداد الحقيقية التي يمكن للنظام أن يسميها	وصف النظام M_3: لن يقول النظام إن هذه الجملة صحيحة
د)	يوجد عدد n لا يمكن توليد عدد طبيعي أكثر تعقيداً منه (التعقيد يعني أقصر وصف له)	يوجد عدد حقيقي لا يمكن للنظام تسميته	توجد جملة حقيقية لا يمكن للنظام أن يدرك أنها حقيقية
هـ)	لا يمكن لأي نظام محدد أن يولّد أنماطاً معقدة عشوائية	لا يمكن لأي نظام محدد أن يفهم كل شيء	لا يمكن لأي نظام محدد أن يعرّف الحقيقة

وفيما يلي تعليل الاستنتاجات في الصف د):

نظراً لأن النظام M_1 لا يمكنه العثور على العدد الطبيعي الموصوف في الصف ج)، فلا يمكنه إذاً تحديد أي عدد يكون أقصر وصف له أطول من طول العدد u. بالنسبة لأي مُدخَل إلى النظام، إما أن يعطي النظام عدداً تعقيده (أي أقصر وصف له) أقل من u، أو سيعمل النظام إلى الأبد. وبعمله إلى الأبد، سيتجاوز النظام الأعداد (بالثواني) ذات التعقيد الكبير العشوائي، لكنه لن يتمكن من التوقف والإشارة إلى الأعداد ذات التعقيد الأكبر من u. وبما أن هذه الحجة تنطبق على أي نظام محدود، فيمكننا استخلاص الاستنتاج العام في السطر هـ).

نظراً لأن النظام M_2 يعترف بوصف محدّد بدقة، فإن الوصف في السطر ج) يصف بالفعل عدداً حقيقياً محدداً. لكن لا يمكن كشف هذا الوصف بواسطة النظام. بهذا السياق، هناك فقرة ذات معنى لا يفهمها النظام، وبالتالي يمكن استخلاص الاستنتاج في الصف هـ). ونذكر من قسم مفارقة ريتشارد أن تحليل إنشاء عدد ريتشارد M_2 يُظهِر أن النظام غير قادر على تسمية العدد الحقيقي T_{M2} الذي يرمز إلى عملية الترجمة الخاصة به. لذا يمكننا تحسين الاستنتاج في السطر هـ) إلى: لا يمكن لأي نظام محدود أن يصف بدقة العملية التي يحوِّل فيها الكلمات إلى أفكار.

نظراً لأن النظام M_3 لا يستخلص استنتاجاً بشأن الفقرة في السطر ج)، فإننا نعلم أن هذا النظام لن يقول إن هذه الفقرة صحيحة. إذاً هذه الجملة حقيقية بالرغم من أن النظام لا يستطيع التعرف على أنها حقيقية. وبالتالي نصل إلى الاستنتاج في السطر هـ)، والذي يمكن صياغته أيضاً بهذه الطريقة: بالنسبة لأي نظام محدود معين، توجد حقيقة لا يمكن له أن يتعرف عليها على أنها حقيقة.

يحمل الاستنتاج الأخير تعبيراً إلى حدٍّ ما عن نظرية غودل الأولى لعدم الاكتمال، والتي سنناقشها بالتفصيل في الفصل التالي، وسنحاول أيضاً استخدام هذه الحقائق لاستخلاص بعض الاستنتاجات حول طبيعة العقول البشرية والآلات.

تعلمنا حتى الآن أنه بالنسبة لأي نظام محدود، سيوجد عدد من الأشياء التي لا يستطيع وصفها أو تصورها أو فهمها. وسيوجد دائماً *أشياء غير قابلة للتسمية بالنسبة* إلى هذا النظام. وهنا يظهر السؤال التالي، هل يوجد شيء *غير قابل للتسمية بالمطلق*، ويتجاوز قدرة استيعاب أي نظام محدود مهما كان.

في الفصل الأول، نظرنا في السؤال عما إذا كان أي شيء لانهائياً فعلياً (على عكس اللانهاية المُحتمَلة). وعلمنا أنه بالنسبة لأي عدد طبيعي n، يوجد عدد طبيعي أكبر (على سبيل المثال، $n+1$). وكان السؤال عما كان هناك أي عدد مثل أوميغا أكبر من كل عدد طبيعي في وقت واحد.

ناقشنا إمكانية اللانهاية الفيزيائية والعقلية في «اللانهايات الفيزيائية» و«اللانهاية في مشهد العقل». وفي «اللانهاية المطلقة» قدَّمتُ **المطلق** على أنه شيء لانهائي بالتأكيد، إذا كان موجوداً بالفعل.

في القسم الفرعي «ترميز العالَم»، عالجنا مسألة ما إذا كانت هناك أي أعداد حقيقية مادية غير قابلة للتسمية على الإطلاق؛ ومن الواضح من مناقشاتنا السابقة لـ**المطلق** أنه غير قابل للتسمية على الإطلاق. مع ذلك، لم نقل الكثير بعد بشأن السؤال عن إمكانية العثور على كائنات عقلية مطلقة غير قابلة للتسمية.

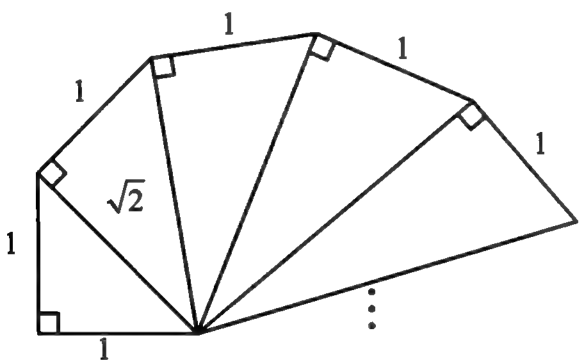
رأينا أن مجموعة كل الكتب الحقيقية هي كائن عقلي غير قابل للتسمية. لكن هذه المجموعة ضبابية إلى حدٍّ ما، ويمكن أن نتساءل عما إذا كانت موجودة بالفعل. وينطبق الأمر نفسه على العملية غير القابلة للتسمية التي نقوم من خلالها بترجمة الكلمات إلى أفكار. سنرى في الفصل التالي أن هناك كائناً عقلانياً معرَّفاً إلى حدٍّ ما لكن لا يمكن تحديده بأي طريقة منتهية. وهي مجموعة كل العبارات الصحيحة عن الأعداد الطبيعية.

ألغاز ومفارقات الفصل الثالث

1. أثبت أن التكرار الأُسِّي للعشرة أكبر من العدد غوغول بلكس.

2. تُقدَّم أحياناً حجة على غرار مفارقة بيري لإثبات أن كل عدد طبيعي مثير للاهتمام. حاول بناء حجة مثل ذلك.

3. أوجد أطوال الأوتار في ترتيب المثلثات الموضح في الشكل 64.



الشكل 64

4. لنفترض أني وجدت كتاباً في المكتبة الشاملة يضم وصفاً صحيحاً ودقيقاً لكامل حياتك وماضيك ومستقبلك. لن يعجبك ذلك، لأنك تشعر أن مستقبلك لم -ولن- يُقرر سابقاً. إذا عرضت عليك هذا الكتاب، هل يمكنك أن تثبت خطأه؟

5. تقول مفارقة التمساح الكلاسيكية: «اختطف تمساح طفل امرأة على ضفاف نهر النيل. توسلت الأم للتمساح ليعيد إليها طفلها، فقال التمساح:

«إذا قلتِ ما سأفعل حقاً سأعيده إليك، إذا لم تقولي، سألتهمه»[42]. ماذا على الأم أن تقول؟

6. ما معنى العبارة التالية: «المُضاف إلى اقتباسه خطأ» المُضاف إلى اقتباسه خطأ[43].

7. بدأ الكاتب جون براث قصته «Lost in the Funhouse» بالقصة التي لا تنتهي: «كان يا مكان كان هناك قصة تبدأ بـ: كان يا مكان هناك قصة تبدأ بـ: كان يا مكان هناك قصة...»[44] يحوي ذلك تسلسل أوميغا من اليمين إلى اليسار. هل يمكنك التفكير بتسلسل مناسب من اليسار على اليمين لإغلاق القصة؟

8. ليكن لدينا بعض الافتراضات الأولية A، ونرغب في استخلاص استنتاج معين C. من أجل القيام بذلك، فإننا نمضي عادة بإثبات التضمين (إذا كان A، إذاً C). لكن لنفترض أن أمامنا شخصاً عنيداً يحاورنا، وينكر أن C ينتج حتماً من A، عندها علينا أن نثبت (إذا كان A و(إذا كان A، إذاً C)، إذاً C). أظهر كيف يمكن لذلك أن يوقعنا في نكوص لانهائي[45].

42- انظر: Lewis Carroll, *Lewis Carroll's Symbolic Logic* (William Bartley, ed., New York: Clarkson Potter, 1977), pp. 425, 426-438. يتضمن هذا الكتاب الضخم نظام كارول لحل «مشاكل الاستدلال التراكمي». هذه المشاكل عبارة عن قوائم من عشرة أو عشرين جملة ذات صلة، والتي يجب على المحلّل دمجها للحصول على نتيجة واحدة. مثلاً: 1) لا شيء ضخم سوى الغول؛ 2) ليس أي من حيواناتي الأليفة السمينة مزعج؛ 3) كل سلاطعين البحر لي؛ 4) كل الغيلان سمينة ومزعجة. أي نتيجة ممكنة لذلك؟ «ليس سلطعون البحر ضخماً!».

43- تعود هذه العبارة من مفارقة الكذاب إلى ويلارد فان أورمان كواين، الفيلسوف المعاصر البارز. وتظهر مناقشة مسلية لذلك في Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (New York: Basic Books, 1979), pp. 431-437. يناقش هذا الكتاب العديد من المواضيع التي نناقشها هنا.

44- John Barth, «Frame-Tale», in: *Lost in the Funhouse* (New York: Grosset and Dunlap, 1969), pp. 1-2.

45- إن نموذج هذه المفارقة هي ما كتبه لويس كارول في «ما قالته السلحفاة لأخيل»، في: *Lewis Carroll's Symbolic Logic*, pp. 431-434. كما ذكر دوغلاس هوفستادتر هذا الحوار في: *Gödel, Escher, Bach*, pp. 43-45.

أجوبة ألغاز الفصل الثالث

1. $googolplex = 10^{googol} = 10^{10^{10^{100}}} = 10^{10^{10^{2}}} < 10^{10^{10^{10}}} = {}^{4}10$

2. العدد

1 مثير للاهتمام لأنه العدد الأول.

2 مثير للاهتمام لأسباب عديدة، إحداها أنه العدد الوحيد الذي يحقق $x+x=x.x=x^x={}^2x$.

3 مثير للاهتمام لأنه العدد الوحيد المساوي لمجموع الأعداد الأقل منه.

4 مثير للاهتمام لأنه المربع الكامل الأول.

5 مثير للاهتمام لأنه أول عدد مساوٍ لمجموع عددين زوجي وفردي (باستثناء 1).

6 مثير للاهتمام لأنه العدد الأول المساوي لمجموع قواسمه الصحيحة.

7 هو العدد الأول n الذي لا يمكن بناء مضلع منتظم ذي n من الأضلاع باستخدام المسطرة والفرجار.

8 هو أول مكعب كامل.

9 مثير للاهتمام لأنه عندما ننتقل من 8 إلى 9 فإننا ننتقل من 2^3 إلى 3^2.

10 مثير للاهتمام لأنه يساوي 1+2+3+4+5. وهكذا.

قام فيليب جاي ديفيس بتألف كتاب بعنوان «معرفة الأعداد الكبيرة»[46]، قدَّم فيه قائمة من الخصائص المثيرة للاهتمام للأعداد حتى العدد 100. على سبيل المثال، العدد 36 مثير للاهتمام لأنه يساوي $1^3+2^3+3^3$.

هل كل الأعداد مثيرة للاهتمام؟ لنفترض وجود بعض الأعداد غير المثيرة للاهتمام على مستقيم الأعداد. وليكن العدد U أول عدد غير مثير للاهتمام. ولكنه سيكون مميزاً –وبالتالي مثيراً للاهتمام– لأنه أول عدد غير مثير للاهتمام! ولأنه ما من شيء يجمع صفتين متناقضتين في الوقت ذاته، لذا فالافتراض بوجود أعداد مثيرة للاهتمام افتراضٌ خطأ. يشبه هذا الجدال

46: *The Lore of Large Numbers* by Philip J. Davis. (المترجمة).

مفارقة بيري، خاصة عندما ندرك أنه بالنسبة للأعداد الكبيرة، أن يكون العدد «مثيراً للاهتمام» يشبه أن «يملك وصفاً قصيراً».

والآن، بما أننا لا نعتقد بأن كل الأعداد مثيرة للاهتمام، كيف لنا أن نجيب على الجدال أعلاه؟ لا يوجد جواب سهل لذلك. لكن يمكن القول: 1) إن خاصية «مثير للاهتمام» غامضة وغير قابلة للتحديد على نحو نهائي. لذا 2) إن خاصية «غير مثير للاهتمام» أيضاً غير قابلة للتحديد على نحو نهائي. ويعني ذلك 3) لا يمكن في الحقيقة بناء مجموعة من كل الأعداد غير المثيرة للاهتمام لإيجاد العدد *U*، أول عدد غير مثير للاهتمام.

3. إن طول وتر المضلع المنتظم ذي العدد n^{th} من الأضلاع هو الجذر التربيعي لـ $n+1$.

4. أجل. يمكنك أن تقول: «في الدقيقة التالية، سأقول إما كلمة «نعم» أو «لا»». بعد ذلك تطلع على الكتاب لترى أي احتمال يتنبأ به. سيتنبأ الكتاب بأحد الاحتمالين، ويمكنك عندها ببساطة ألا تقول شيئاً، أو تفعل أمراً مختلفاً. وبالتالي تدحض تنبؤات الكتاب.

يمكن للمرء بالطبع أن يجادل بأنه لا يستطيع أحد فعل ذلك، أو أن الكتاب سيتنبأ بهذه المحاولة! وبالتأكيد، إذا لم تشاهد الكتاب مطلقاً، فلن تستطيع دحضه أبداً.

لكن النقطة التي نناقشها هنا ليست وجود «كتاب يتنبأ بكل شيء» أو عدم وجوده، بل نناقش من حيث المبدأ إمكانية دحض تنبؤات هذا الكتاب إذا عُرض على أحد ما. في الفصل الثالث عشر من كتابي «Whit Light»، أذكر رواية مشابهة لهذا النقاش. كما توجد رواية مشابهة في الفصل السادس من كتاب آلفين غولدمان «نظرية الفعل البشري»[47]، لكني أعتبر نقاش غولدمان «غير دقيق» بعض الشيء، لأن بطل الرواية يقوم بمحاولة واحدة فحسب لدحض تنبؤات كتاب حياته، ويخطئ في قراءة موعد التنبؤ.

1: *A Theory of Human Action* by Alvin I. Goodman. –47

5. يجب على الأم أن تقول: «ستلتهمه!» وبذلك توقع التمساح في تناقض، فإن التهمه سيخلف بوعده بأن يعيده إليها إذا نطقت بالحقيقة. تشبه هذه الحالة دخول آلة الحقيقة في تناقض كما ذكرنا في قسم «ما هي الحقيقة».

6. تعادل هذه الجملة العبارة التي ذكرناها أ) هذه العبارة خطأ. ويمكن لنا أن نتخيل تشكيل جملة أطول بوضع هذه العبارة بين قوسين وإلحاقها بالعبارة ذاتها: «هذه العبارة خطأ» هذه العبارة خطأ. وعلى المنوال نفسه، يمكن تشكيل عبارات عديدة.

7. توجد احتمالات عديدة. لكن أفضل ما فكرت به هو: .... وانتهت فجأة وانتهت فجأة وانتهت فجأة.

8. أفضل إجابة على ذلك هو مفارقة آلة الحقيقة. ما يحدث هو أننا نبدأ من A و(إذا كان A، إذاً C). لكن إذا افترضنا أن كلمة «إذاً» تعني «نستنتج حتماً» لأمكننا أن ننهي النقاش. لكن العقل المتشكك لا يقبل ذلك، ونعيد القول: إذا كان A و(إذا كان A، إذاً C) إذاً C. وبالاستمرار بذلك نقع في نكوص لانهائي. تشير «إذاً» إلى المنطق الشكلي، بينما تشير «نستنتج حتماً» إلى السلوك البشري، ولا يوجد في التحليل الأخير سبب يجعل الرموز على الورق تفرض أي نوع من السلوك! ونظراً لأن المنطقيين اليائسين يحاولون جاهدين لفعل ذلك، فيضطرون إلى الانحدار في نكوص مستمر، وتكون الخطوة التالية إذا كان A و(إذا كان A، إذاً C) و(إذا كان A و(إذا كان A، إذاً C)) إذاً C.

الفصل الرابع

الإنسان الآلي «الروبوت» والروح

هل نحن البشر مجرد آلات معقدة... أم نحمل بداخلنا أرواحاً؟ من ناحية، الشعور بالوعي يشبه شيئاً أكثر من العمل الميكانيكي الذي يمكن أن يصدر عن برنامج حاسوب. لكن من ناحية أخرى، ما الذي يمكن أن تكونه الروح؟ كيف يمكن أن تتصرف؟ وهل يمكن للآلة أن تحمل روحاً؟

هناك نظرية في المنطق الرياضي، هي نظرية عدم الاكتمال التي قدّمها كورت غودل، تتداخل مع هذه المجموعة من المشاكل. سنبدأ في هذا الفصل بالبحث بنظرية غودل الشهيرة، وننتهي بذكر بعض التكهنات حول الذكاء الآلي وطبيعة الوعي.

يقدِّم القسم الأول نظرة عامة وسريعة على النظرية. ويصف القسم التالي سلسلة من المحادثات التي أجريتها مع غودل حول نظريته وبعض الأمور ذات الصلة. ويحتوي قسم «نحو وعي الروبوت» على معالجة أكثر تفصيلاً لنظرية غودل، ويشرح بالضبط ما اعتقد غودل أنها عواقب نظريته في مجال الذكاء الاصطناعي. وتوجد مناقشة أكثر تفصيلاً في التدريب الثاني. وفي القسم «ما وراء الآلية»، نستكشف ادعاء غودل بوجود مكوّن غير مادي للوعي البشري.

نظرية عدم الاكتمال لـ «غودل»

في صيف عام 1930، أثبت كورت غودل، عالِم الرياضيات ذو الأربعة والعشرين عاماً، نظرية غريبة: للرياضيات نهاية مفتوحة. ولا يمكن أبداً أن يوجد نظام كامل ونهائي للرياضيات. وسيواجه كل نظام رياضي بديهي في النهاية بعض المشاكل التي لا يمكنه حلُّها. هذه هي نظرية عدم الاكتمال.

كانت تداعيات هذا الاكتشاف التاريخي مدمِّرة، بعد أن اعتبر مفكرو الثورة الصناعية أن الكون آلة ضخمة مُبرمَجة مسبقاً. كان التفاؤل يعمّ وسط العلماء الذين اعتقدوا أنهم سيعرفون قريباً جميع القواعد وجميع النظم والبرامج. لكن نظرية غودل أخبرتنا بأمر آخر: لن يعرف الإنسان أبداً السر النهائي للكون.

يمكن لأي شخص بالطبع أن يقول إن العِلم لا يملك الإجابة على كل شيء. لكن ما يجعل إنجازات غودل رائعة للغاية هو إثباته ذلك بدقة، واضعاً برهانه باللغة الدقيقة للمنطق الرمزي. إن التوصل لبرهان رياضي لعدم اكتمال الرياضيات يتطلب تجاوز المرء آفاقه الفكرية الخاصة. فكيف توصَّل غودل إلى هذا البرهان؟ وأي نوع كان من الأشخاص؟

ولد كورت غودل في 28 نيسان عام 1906، في مدينة برون في تشيكوسلوفاكيا، والتي كانت حينها جزءاً من النمسا-المجر. كانت عائلته جزءاً من أقلية ألمانية في المدينة، وكان والده مديراً لأحد مصانع النسيج. أُصيب غودل بحمى روماتيزمية في طفولته وتعافى منها، إلا أنه عانى من مخاوف مرضية طوال حياته[1].

1- استقيت تفاصيل حياة غودل من: Georg Kreisel, Kurt Gödel, 1906-1978, the Royal Society of London.

التحق غودل بجامعة فيينا عام 1923، وحصل على درجة الدكتوراه في الرياضيات عام 1930. كانت فيينا مركزاً فكرياً مُشعّاً في تلك الفترة. من بدايات التحليل النفسي والموسيقى الاثني عشرية (وهي أحد فنون التأليف الموسيقي الحديث)، إلى العمارة المعاصرة والرسم التجريدي، مع سيغموند فرويد والموسيقي أرنولد شوينبيرج والمعماري أدولف لوس والرسام أوسكار كوكوشكا، الذين كانوا جميعهم في فيينا.

كان أهم من ذلك كله بالنسبة لغودل، هو فترة التخمُّر الفلسفي العظيم في فيينا. في عام 1921، نشر المفكر لودفيغ فيتغنشتاين مؤلَّفه الثمين «مصنَّف منطقي فلسفي»[2]. وأُسِّست الوضعية المنطقية من قِبل مجموعة من الفلاسفة عُرِفوا باسم «حلقة فيينا». كان هانس هان، المعلم الأبرز لغودل، عضواً بارزاً في هذه المجموعة، مع موريتز شليك وفيليب فرانك ورودولف كارناب. عقدت «حلقة فيينا» معظم اجتماعاتها في غرفة ندوات بالقرب من قسم الرياضيات، وحضر غودل هذه الاجتماعات بانتظام.

قدَّم رودولف كارناب في بيانه تلخيصاً للعقيدة الأساسية للوضعية المنطقية: «نحن لا نقدِّم إجابات على الأسئلة الفلسفية ونرفض فعلاً جميع الأسئلة الفلسفية، سواء كانت ماورائية أو أخلاقية أو معرفية»[3]. كانت الفكرة أن بياناً فلسفياً مجرداً مثل «الكل واحد»، لا معنى له. إنه ليس صحيحاً أو خطأً، بل بدون محتوى. واستند هذا الرأي إلى ما يُسمَّى «مبدأ التحقق»، الذي يقول إن المعنى يُعطى للعبارة التي يمكن التحقق منها فحسب، أما ما لا نستطيع التحقق منه فهو بلا معنى. ولأن الوضعيين لم يجدوا طريقة علمية لتوثيق عبارات ماورائية مثل «الكل واحد» أو «المطلق خارج الزمن»، اعتبروا أنها خالية تماماً من الأهمية.

كان هذا الجزء السلبي من الوضعية المنطقية متأثراً على نحو أساس بكتاب لودفيغ فيتغنشتاين الشهير. يقدِّم هذا الكتاب القصير والمليء

2- *Tractatus Logico-Philosophicus* by Ludwig Wittgenstein. (المترجمة).

3- هذا الاقتباس من مقال: John Passmore, Logical Positivism, *The Encyclopedia of Philosophy*, Vol. 5, pp. 52-57.

بالحكمة حلاً للمشاكل الفلسفية التقليدية، وهو «ما لا يمكننا الحديث عنه، علينا أن نتجاوزه بصمت»[4].

على الرغم من أن فيتغنشتاين كان صديقاً لأعضاء حلقة فيينا، إلا أنه لم يكن أبداً من الوضعيين المنطقيين. على العكس من ذلك، يبدو أحياناً كأحد متصوفي الزن. ونجده يصف رأيه بأناقة في كتابه، قائلاً: «بعد الإجابة على كل الأسئلة العلمية الممكنة، يبقى الشعور بأن إشكالية الحياة ما تزال على حالها تماماً. حينها بالطبع لن يكون هناك المزيد من الأسئلة، وهذا هو الجواب بحدِّ ذاته. إن الجواب على إشكالية الحياة هو وصولنا لمرحلة تلاشي الإشكالية»[5].

كان الجزء الإيجابي من الوضعية المنطقية هو الوصول إلى برنامج لتوحيد كل العلوم، باستخدام لغة المنطق الرمزي. جاء الإلهام من عمل ألفريد نورث وايتهيد وبرتراند راسل، «مبادئ الرياضيات»، عام 1910[6]. يبيِّن هذا العمل الضخم (المؤلَّف من ثلاثة مجلدات) كيف يمكن أن نستمد جميع المفاهيم والحقائق الرياضية المألوفة منطقياً لدينا من مبادئ التفكير البسيطة والأولية. وأمِل الوضعيون المنطقيون في التعامل مع فروع أخرى للعلم، بما في ذلك الفيزياء وعلم النفس، بالطريقة الصارمة ذاتها.

كان الإنجاز الرئيس لوايتهيد وراسل هو الحصول على تعريف دقيق ميكانيكياً لمعنى أن نستقرئ منطقياً عبارة ما من عبارة أخرى. ومع وجود

4- Ludwig Wittgenstein, *Tractatus*, 7, p. 151.

5- المرجع السابق، المقطع 6.52، ص 149. إن المقطع 6 بأكمله من هذا الكتاب يتحدث بنبرة غامضة عن أشياء يمكن أن تُعرف، لكنها لا يمكن أن تُختبر عقلياً. لكن من الأمور المثيرة للغضب حول تأثير فيتغنشتاين على الفلسفة الحديثة، هو تجاهل هذا المقطع، واعتبار جملة ختام الكتاب: «حيث لا يمكن للمرء أن يتكلم، لا بدّ من الصمت». إنذاراً دائماً ضد التأمل الصوفي الذي يتحدث عنه فيتغنشتاين ذاته في المقطع 6. حتى إن برتراند راسل كتب تعليقاً قاسياً بعض الشيء في مقدمة ترجمته لكتاب فيتغنشتاين، ناقداً الفرق بين ما يقوله فيتغنشتاين وما يفعله: «بعد كل شيء، يبدو أن السيد فيتغنشتاين تدبَّر قول الكثير حول ما لا يمكن قوله». p. xxi.

6- Bertrand Russell and Albert North Whitehead, *Principia Mathematica* (New York: Cambridge University Press, 1910–1913).

هذا التعريف، أشار عالم الرياضيات «الشكلي» ديفيد هيلبرت إلى أن الرياضيات الآن ليست سوى مسألة اختيار البديهيات الصحيحة ودراسة النتائج المنطقية لهذه البديهيات. كان أمل الوضعيين أن يتسع هذا النهج ليشمل جميع العلوم، وحتى الفكر الإنساني بأكمله.

وأودّ هنا أن أجري تجربة فكرية صغيرة، لفهم آثار هذا النهج البرمجي على المعرفة البشرية. سنتخيل الآن أحداثاً في عالَم بديل لعالمنا:

«في عام 1950، توصَّل العلماء إلى نظام بديهي كامل للرياضيات، دُعي هذا النظام الحقيقة الرياضية *MT*: «Mathematic True». وثبُت نظرياً أن أي عبارة رياضية صحيحة يمكن برهانها في النظام، وأي عبارة رياضية خاطئة يمكن دحضها فيه أيضاً. وهكذا، فإن بديهيات النظام *MT*، إلى جانب قواعد وايتهيد-راسل-هيلبرت، استوعبت كامل الرياضيات.

لم يبدأ تأثير هذه النظرية على علماء الرياضيات حتى القرن الحادي والعشرين. كان العلماء حتى ذلك الوقت مستمرين بالاعتماد على حدسهم وإبداعهم لإيجاد طرق تجمع بين بديهيات النظام *MT* المختلفة لإعطاء البراهين المنطقية للنظريات المتنوعة. لكن في عام 2000، تطوّرت أجهزة الحاسوب بما يكفي لتولّي المهمة. وفي غضون عشر سنوات، جعل الاعتماد على التيار الكهربائي الفائق (تأثير جوزيفسون)[7] الآلات فائقة بدورها، ولم يعد هناك حاجة لعلماء الرياضيات. ودُعي الحاسوب الجديد «آلة الحقيقة الرياضية» *MTM*: «Mathematic True Machine».

تمّت برمجة الآلة *MTM* مع البديهيات الأساسية للنظام الكامل *MT*.

7- تأثير جوزيفسون أو ما يُعرف بظاهرة التيار الفائق، هو تيار يتدفق إلى أجل غير مسمى دون أي جهد مطبق، عبر جهاز يعرف باسم تقاطع جوزيفسون (JJ)، والذي يتكون من اثنين من الموصلات الفائقة إلى جانب وصلة ضعيفة. وسُمِّي على اسم الفيزيائي البريطاني برايان ديفيد جوزيفسون، الذي توقع في عام 1962 العلاقات الرياضية للتيار والجهد عبر الرابط الضعيف. انظر: *Physics and Applications of the Josephson Effect* by Antonio Barone Gianfranco Paternò, John Wiley & Sons, Inc. (المُترجمة).

وعملت الآلة على نحو شامل لحلّ جميع العواقب المنطقية لهذه البديهيات: أولاً جميع النظريات مع البراهين ذات الخطوة الواحدة، ثم جميع البراهين المؤلَّفة من خطوتين، ثم ثلاثة... ثم ثلاثة ملايين... وهكذا.

كانت الآلة تضيف النظريات التي تثبتها واحدة بعد الأخرى إلى قائمتها الرئيسية المنهجية. وإذا أردت معرفة حلول بعض المشكلات الرياضية، مثل «هل مبرهنة فيرما الأخيرة صحيحة؟»، أو «ما حل هذه المعادلة التفاضلية؟»، أو «ما أقصر طريق يربط بين هذه المدن العشر؟»، فيمكنك أن تُدخِل سؤالك في الآلة *MTM*، وستبحث الآلة في قائمتها الرئيسية عن إجابتك.

إذا وُجدت الإجابة في القائمة الرئيسية، فذلك أمر جيد. أما إذا لم توجد، فعليك الانتظار قليلاً، وعاجلاً أم آجلاً ستصل الآلة إلى الإجابة النظرية على سؤالك. لا جدوى من استشارة عالِم رياضيات بدلاً من الآلة، لأنها تتجاوز جميع الاستنتاجات المنطقية التي يمكن أن يستوعبها أي إنسان.

سار الأمر على ما يرام مع الجميع باستثناء علماء الرياضيات. تمرد بعضهم وأنشؤوا «رياضيات سوريالية» جديدة تقوم على افتراضات خاطئة وغير متسقة عمداً. لكن الآلة *MTM* تفوقت على علماء الرياضيات حتى في ذلك المجال من الرياضيات، من خلال العمل لوقت إضافي لدراسة النظريات الخاطئة في هذه «الرياضيات السوريالية» الجديدة. ومع مخزونها المتزايد باستمرار من الحقائق الرياضية والمنطقية، كانت الآلة تزداد سرعة في الأداء. كان يمكن لأي شخص أن يُدخل فيها بعض البديهيات، وستخرج نتائج ذلك في غضون ثوانٍ قليلة.

كانت الفيزياء هي التالية في هذا الطريق بعد الرياضيات. في أواخر التسعينيات، حقّق أحد طلاب الدراسات العليا التوحيد النهائي بين نظرية النسبية العامة ونظرية الكم. وتمكن من تلخيص جميع قوانين الطبيعة في قائمة بسيطة من البديهيات. وتمّت برمجة هذه النظرية، التي دُعيت الحقيقة الفيزيائية *PT*: «Physics True»، في حاسوب مرتبط بآلة الحقيقة الرياضية. وبدأت الآلة الجديدة، آلة الحقيقة الفيزيائية *PTM*: «Physics True Machine»، بالعمل المنهجي لاستخلاص عواقب الحقيقة

الفيزيائية. وسرعان ما قدَّمت حلاً لمسألة «الأجسام الثلاثة»، وإجابة لكتلة الإلكترون، وحساباً دقيقاً لعمر الكون. كما اكتشفت عدة طرق للاندماج النووي الآمن.

وصلت آلتا الحقيقة، الرياضية والفيزيائية، إلى كمية خطيرة من المعرفة. وفي السنوات التالية، تمّ العثور على نظريات كاملة في علم الأحياء وعلم النفس وعلم الاجتماع. وجمع نظام من أجهزة الحاسوب المرتبطة ببعضها البعض على مستوى الكوكب جميع هذه النظريات، وظهرت الآلة الشبيهة بالإله، آلة الحقيقة العلمية *STM*، «Scientific Truth Machine».

قدَّمت آلة الحقيقة العلمية أفضل الإجابات على كل الأسئلة التي طُرحت عليها، سواء امتلكت الإجابة في قوائمها الرئيسية أم عملت على استنتاجها خلال وقت قصير. لم يكن لأي عالِم أن يحيط بالمعرفة التي تمتلكها هذه الآلة، لذا أصبح عمل الأفراد عديم الفائدة. وبعد أن كان للعلماء مكانة مرموقة لإبداعهم وقدراتهم الفكرية التي لا تُستبدل، حلَّ العمل الميكانيكي الكامل المُستمَد من نظرية كاملة مكان العمل الإبداعي العلمي والحدس البشري.

جاءت الخطوة الأخيرة في عام 2060، حين قام أحد العلماء، بمساعدة آلة الحقيقة العلمية *STM*، بوضع نظرية كاملة عن الجماليات. جُمعت القوانين الثابتة لما يجعل رواية أو لوحة أو سيمفونية عملاً عظيماً في نظام بديهي سُمِّي نظام الحقيقة الفنية *AT*: «Art True». وبدأت الآلة *ATM*: «Art True Machine» الشبيهة بسابقاتها، والتي أُنشئت بطريقة سرية، في إنتاج أعمال قصيرة معبِّرة عن حالة الإنسان في الكون.

بدأت احتجاجات الفنانين لكن بدون جدوى. وقامت الحكومة بالجمع بين آلة الحقيقة الفنية *ATM* وآلة الحقيقة العلمية *STM*، في آلة الحقيقة العالمية *UTM* «Universal Truth Machine». ولم تعد هناك حاجة للقيام بأي شيء. كل ما أراد أي شخص أن يعرفه أو يفعله أو يقوله، فإن آلة الحقيقة العالمية ستفعله على نحو أفضل. كانت الأعمال الإرهابية ضد آلة الحقيقة العالمية مستحيلة، لأن الآلة امتلكت نظرية كاملة حول السلوك

البشري، مما جعلها قادرة على التنبؤ بأي هجوم وصدّه بأكثر الطرق فعالية. كان الشيء الوحيد الذي بقي للبشر هو الرياضة. وتمّ توصيل محطة من آلة الحقيقة العالمية إلى كل منزل في الكوكب، وانزلق البشر نحو الشيخوخة وهم يتسمَّرون أمام شاشاتهم في بيوتهم».

أمر مثير للإحباط، أليس كذلك؟ لكن لا تقلقوا.

في عالمنا الحقيقي، أثبت كورت غودل في عام 1930 أنه لا يمكن لآلة الحقيقة العالمية أن توجد أبداً، ولا حتى آلة الحقيقة الرياضية. السبب في ذلك أن ما من مجموعة كاملة من البديهيات الرياضية التي تحيط بعلم الرياضيات بالكامل. وإن أي نظام للمعرفة غير مكتمل، وسيبقى كذلك، وعليه أن يخضع للمراقبة والتصحيح إلى الأبد.

يمكن لما حدث في قصتنا الخيالية أن يكون احتمالاً في المستقبل. لكن غودل أثبت أن الآلات لن تمتلك الإجابات الكاملة أبداً. وستبقى دائماً مساحة للإبداع البشري الذي يقدِّم طرقاً أفضل لفعل الأشياء.

إذا حاوِلنا الإمساك بالكون بواسطة شبكة نهائية من البديهيات، سيقاوم الكون ذلك. إن الواقع، على أعمق مستوى، لانهائي في أساسه. ولا يمكن لأي آلة مبرمَجة نهائية أن تستوعب الثراء العقلي والفيزيائي للعالَم الذي نعيش فيه. إن إثبات نظرية عدم الاكتمال بسيط لكنه يتضمن مفارقة مماثلة لما ذكرنا في الفصل السابق. وسأذكر نموذجاً لهذا الإثبات فيما يلي:

1. ليكن لدينا آلة الحقيقة العالمية، والتي يمكنها أن تقدِّم إجابة صحيحة تماماً على أي سؤال يطرحه غودل عليها.
2. يطلب غودل من الآلة أن تقدِّم له مخططاً لبرنامجها. قد يكون هذا البرنامج معقداً، لكنه سيكون منتهياً بالتأكيد مهما ازداد طوله. لنُسمِّي البرنامج $P(UTM)$.
3. يبتسم غودل، ويكتب الجملة G التي تقول «الآلة التي أُنشئت حسب البرنامج $P(UTM)$ لن تقول إن هذه الجملة صحيحة أبداً». والتي تعادل «الآلة لن تقول إن هذه الجملة صحيحة أبداً».

4. الآن، تظهر المفارقة: لا يمكن للآلة أن تقول عن هذه الجملة إنها صحيحة، لأن الجملة ستكون خاطئة حينها، ولا يمكن للآلة أن تقدِّم إلا جملاً صحيحة. وبالمقابل، لا يمكن أن تقول عنها إنها خاطئة، لأن الجملة حينها ستكون صحيحة، وبذلك تقع الآلة في خطأ، وهذا الأمر غير ممكن حسب برنامجها.
5. أثبتنا إذاً أن الجملة «الآلة لن تقول إن هذه الجملة صحيحة أبداً» حقيقة.
6. سيضحك غودل الآن قائلاً: «أعرف حقيقة لا يمكن لآلة الحقيقة العالمية أن تدركها أبداً. إنها ليست بآلة حقيقة عالمية بعد الآن».

فكّروا في الأمر، لا بد أنه أعجبكم.

تشبه الحيلة في إثبات غودل لعجز الآلة عند حدّ معين الحيلةَ التي ذكرناها سابقاً في مفارقة الكاذب. كما في الجملة «هذه الجملة ليست صحيحة،» والتي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت خاطئة! إن هذه المعاني تقع خارج نطاق مفاهيم «الصح» و«الخطأ». يوجد شيء لا معنى له في هذه الجملة، وهو شيء لا يمكن إلا للعقل البشري أن يفكر فيه.

استطاع غودل، بفضل عبقريته الرياضية والمنطقية، أن يجد طريقة لكتابة معادلة معقدة متعددة الحدود التي تملك حلاً إذا وفقط إذا كانت الجملة G، الرياضية والواضحة، صحيحة. والجملة G هي مسألة رياضية نعرف إجابتها مسبقاً، بالرغم من أن الآلة لا تعرف! لذا فإن الآلة لا يمكنها تسجيل أفضل نظرية كاملة للرياضيات أبداً.

عارضت نظرية غودل في عدم الاكتمال الحركات الوضعية الشكلية والمنطقية في ذلك الوقت. لكن من يقرأ إثباته التفصيلي سيضطر للاعتراف بصحته. وأصبح غودل مشهوراً على إثر ذلك.

عندما اندلعت الحرب العالمية الثانية، انتقل غودل إلى أمريكا. واستقر في برينستون، نيوجيرسي، وتولى منصباً دائماً في معهد الدراسات المتقدمة، الذي أسّسه رجل الأعمال لويس بامبرغر. التقى غودل في المعهد بأينشتاين، الذي كان مسناً حينها. وكثيراً ما شوهدا في حديقة المعهد يمشيان ويناقشان

النظريات العلمية. كما نشر غودل ورقة بحثية في النسبية، وصف فيها كوناً يمكن فيه السفر عبر الزمن[8].

قدَّم غودل عملاً مميزاً في أربعينيات القرن الماضي. ونشر كتابه الوحيد «اتساق فرضية الاستمرارية» بعد وصوله إلى أمريكا بفترة وجيزة، والذي يضمّ دراسة حول نظرية المجموعة[9]. يقدِّم هذا الكتاب دليلاً على استحالة دحض فرضية الاستمرارية لكانتور بالاعتماد على بديهيات نظرية المجموعة. وكان لهذا العمل، كما لنظرية عدم الاكتمال، أثر كبير على الرياضيات والفلسفة. وعرض غودل فيه طريقة جديدة تماماً للتفكير في «الفئة الشاملة»، واكتشف بعض السمات المطلقة للكون الرياضي.

في منتصف أربعينيات القرن الماضي، كتب غودل بحثين فلسفيين إلى حدّ ما، وتوجه فيهما إلى غير المختصين، هما «منطق راسل الرياضي»[10] و«ما هي مشكلة استمرارية كانتور؟»[11][12]. يُظهِر هذان البحثان أن غودل لم يكن أبداً وضعياً منطقياً. ويجادل فيهما بأن المجموعات والمفاهيم موجودة خارج نشاط أي فرد، وأن السؤال عن المجموعات اللانهائية يحمل معنى كأي سؤال متعلق بالفيزياء والمادة. أصبح هذا المذهب الأفلاطوني في فكر غودل أكثر وضوحاً على مرّ السنين، وبلغ ذروته في عام 1964، في الملحق الذي أضافه إلى بحث «ما هي مشكلة استمرارية كانتور؟»، والذي أقتبس منه التالي:

«على الرغم من بعدها عن التجربة الحسية، فإن البديهيات التي نملكها تجبرنا على قبولها على أنها حقيقة، مثل إدراكنا لكائنات نظرية المجموعة.

8- Kurt Gödel, «An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field of Equations of Gravitation», *Reviews of Modem Physics* 21 (1949), pp. 447-450.

9- Kurt Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis* (Princeton University Press, 1940).

10- *Russell's Mathematical Logic* by Kurt Gödel.

11- *What is Cantor's Continuum Problem* by Kurt Gödel.

12- أُعيدت طباعة هاتين المقالتين في: P. Benacerraf and H. Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964), on pp. 211-232 & pp. 258-273. بعد أن ظهرتا للمرة الأولى عامي 1944 و1947.

وإني لا أرى أي سبب يبرّر أن نكون أقل ثقة في هذا النوع من الإدراك -أعني الحدس الرياضي- من ثقتنا في الإدراك الحسي... ولا تقل المفارقات في نظرية المجموعة صعوبةً وإزعاجاً بالنسبة للرياضيين عما يسببّه خداع الحواس للفيزيائيين... من الواضح أن الرياضيات الأساسية «المفروضة» ترتبط ارتباطاً وثيقاً بالعناصر المجردة الموجودة في أفكارنا التجريبية. ومع ذلك، لا يتبع هذا بأي حال أن بيانات النوع الثاني هي شيء ذاتي بحت كما أكّد كانط، وذلك لعدم إمكانية ربطها بأفعال لأشياء معينة على أعضائنا الحسية. قد تمثّل بالأحرى جانباً من الواقع الموضوعي، ولكن قد يكون وجودها فينا بسبب نوع آخر من العلاقة بيننا وبين الواقع، على عكس الأحاسيس»[13].

واجه غودل بعض المعارضة بين أوساط المعهد لنظريته، بالرغم من المستوى العالي للإبداع العلمي خلال تلك الفترة. ولم تتمّ ترقيته إلى عضو هيئة تدريسية حتى عام 1953[14]. ربما يعود سبب ذلك إلى الآراء التي وجدت نظرية غودل سلبية تماماً، ونتيجة لذلك رُفضت نظريته واعتُبرت مجرد فضول لا أهمية رياضية أو فلسفية حقيقية له.

في الواقع، إن نظرية غودل لعدم الاكتمال لا تقلّ أهمية عن إثبات فيثاغورس أن الجذر التربيعي للعدد 2 غير منطقي، حتى إن التشابه بينهما قريب جداً. عرف فيثاغورس أنه لا توجد نسبة من أعداد طبيعية يمكن أن تعبِّر على نحو كامل عن العلاقة بين قطر الدائرة وضلع المربع. أما غودل، فأظهر أن ما من نظرية موصوفة على نحو محدد ونهائي يمكنها أن ترمِّز وتحيط بالحقيقة الرياضية بكاملها. أي إنه أظهر أن المجموعة التي تضمّ كل العبارات الصحيحة في الرياضيات غير قابلة للوصف على نحو نهائي، وبالتالي هي مجموعة عشوائية ولانهائية.

تستخدم نظرية عدم الاكتمال المنطق الرياضي لإثبات حقائق معينة

13- P. Benacerraf and H. Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964), on p. 272.

14- انظر: Stanislaw Ulam, *Adventures of a Mathematician* (New York: Charles Scribner's Sons, 1976). وهنا يقتبس ستانيسلو أولام قول جون فون نيومان: «كيف لأي منا أن يُدعى أستاذاً بينما غودل ليس كذلك؟».

حول العالَم الموضوعي، ويُعتبر ذلك من السمات المميزة لعمل غودل. في عام 1949، حاول إثبات أن الزمن غير واقعي، من خلال حجة في الفيزياء الرياضية[15].

نشر غودل بعد ذلك بحثاً واحداً، وهو مناقشة عام 1958 لكيفية إثبات اتساق الرياضيات اعتماداً على الافتراض بأن الكائنات الذهنية تملك وجوداً مادياً[16]. لم يكن غودل محباً للدعاية، ولم يقم بأكثر من ظهور عام أو ظهورين خلال الجزء الأخير من حياته. ومع ذلك، تابع دوره كقائد توجيهي في المنطق ونظرية المجموعة. وكان أي عالِم رياضيات يُدعى إلى مكتبه يلبِّي ذلك بشغف وحماسة.

في القسم التالي، سأروي دعوتي إلى مكتبه في معهد الدراسات المتقدمة.

15- Kurt Gödel, «A Remark on the Relationship Between Relativity Theory and Idealistic Philosophy», في: Paul Schilpp, ed., *Albert Einstein: Philosopher Scientist, Vol. II* (New York: Harper & Row, 1959), pp. 557-562. يوجد أيضاً نقاش حديث حول أفكار غودل في علم الكون في: S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1973), pp. 168-170.

16- Kurt Gödel, «Über eine Bisher Noch Nicht Benutzte Erweiterung des Finiten Standpunktes», *Dialectica* 12, (1958), pp. 280-287.

محادثات مع غودل[17]

لم أكن أعرف باب مكتبه الخاص. لذا طرقتُ الباب الخارجي للقسم. كان باباً زجاجياً يفضي إلى فناء مطل على الغابات الهادئة خارج معهد الدراسات المتقدمة. وكان يوماً مشمساً من أيام آذار، لكن المكان كان مظلماً تماماً. ولم أستطع رؤية من بداخله. هل طلب «كورت غودل» رؤيتي حقاً؟

ظهر غودلِ أمام الباب الزجاجي وفتحه، ودخلنا إلى مكتبه.

كان كورت غودل بلا شك أحد أعظم علماء المنطق في القرن العشرين. وربما كان أحد أعظم الفلاسفة أيضاً. عندما توفي في عام 1978، ألقى أحد المتحدثين في حفل تأبينه مقارنة مثيرة بين غودل وأينشتاين... وبينه وبين كافكا[18].

كما أينشتاين، كان غودل يتحدث الألمانية، وسعى للحصول على ملاذ آمن في برينستون خلال أحداث الحرب العالمية الثانية. وكما أينشتاين، طوَّر غودل بنية فكرية دقيقة أجبرت الجميع، من علماء وأشخاص عاديين، على النظر إلى العالم من حولنا بطريقة جديدة.

أما كافكا، فنجد ما يشبه عمله في نظرية غودل عن عدم الاكتمال. وبالرغم من إثباته النظرية بطريقة رياضية صارمة، فإن غودل يبدو أنه يقول: «لا يمكن للفكر العقلاني أن يصل إلى الحقيقة المطلقة اللانهائية». وبتعبير أكثر دقة، تُظهِر نظرية عدم الاكتمال أنه لا يمكن للبشر أبداً صياغة وصف

17- يمكن قراءة نسخة مختلفة قليلاً من هذا المقطع منشورة في: *Science 81* in April 1982.

18- انظر: «In Memoriam Kurt Gödel», *The Mathematical Intelligencer* (July, 1978), pp. 182-185.

صحيح وكامل لمجموعة الأعداد الطبيعية {0، 1، 2، 3، ...}. وإذا لم يتمكن علماء الرياضيات من فهم أمر بسيط مثل نظرية الأعداد، فلن يتمكن العلم بالتأكيد من اكتشاف أي سر لانهائي للكون.

يضع ذلك علماء الرياضيات في موقف شبيه بموقف «كيه»، بطل رواية «القلعة» لـكافكا[19]. نسرع في الممرات صعوداً وهبوطاً، ونلتقي بالناس، ونقرع الأبواب، ونجري الأبحاث، ونفعل كل ذلك إلى ما لانهاية. لن نصل إلى النجاح المطلق أبداً. فلا يوجد في قلعة العِلم باب نهائي يوصلنا إلى الحقيقة المطلقة.

يبدو ذلك محبطاً. ولكن من المفارقات التي نجد أنفسنا فيها، أن فهمنا إثبات غودل يمنحنا نوعاً من التحرر. وبالنسبة للعديد من طلاب المنطق، يشكل الفهم الكامل لنظرية عدم الاكتمال تجربة تحول. وينتج ذلك جزئياً من الغموض الذي يحمله اسم غودل. ولكنه ينتج على نحو أكثر عمقاً من أن فهم طبيعة المتاهة للقلعة-العِلم، يعني التحرر منها.

أعجبت بـ غودل، أعجبت به كرجل حرّر نفسه من الصراع الدنيوي. قمت بزيارته في مكتب المعهد ثلاث مرات عام 1972، وأكثر ما أتذكره، ضحكته.

كان صوته رخيماً وعالياً. وكثيراً ما كان يرفع نبرته في نهاية عباراته، محمِّلاً إياها صفة التساؤل والشك. طغت همهمة ممتعة أحياناً على حوارنا، والذي تخلّله رشقات من الضحك.

كان للمحادثة مع غودل تأثير منوِّم عليّ. وكنت ممتلئاً بإحساس الفهم الكامل خلالها. ومن جانبه، استطاع أن يتابع أي سلسلة من سلاسل أفكاري حتى النهاية. ومع ضحكاته الغريبة واستيعابه الفوري لما كنت أقوله، شعرت بمحادثتي معه كأنها تجربة تخاطر مباشر.

19- Franz Kafka, *The Castle* (Willa and Edwin Muir, trans., New York: Knopf, 1976). أمضيت وقتاً طويلاً في هيدلبرغ أقرأ مذكرات كافكا: *The Diaries of Franz Kafka* (Max Brod, ed., New York: Schocken Books, 1949). لدرجة أني كتبت قصة بأسلوبه: Rudy Rucker, «The Fifty-Seventh Franz Kafka», *The Little Magazine* (Summer, 1982).

كانت المرة الأولى التي زرت فيها غودل بناءً على دعوته. كنت في جامعة روتجرز، أكتب أطروحتي للدكتوراه في المنطق ونظرية المجموعة. وكنت مهتماً على نحو خاص بمشكلة الاستمرارية لكانتور. كان يتم تداول إحدى مخطوطات غودل غير المنشورة حول هذه المشكلة، وحصلت على نسخة منها[20].

قمت بفكّ الرموز الباهتة للمخطوطة وفكرت فيها لعدة أشهر، وأخيراً ناقشتها في الجامعة. كان لدي أسئلة حول الدليل الذي قدَّمه غودل، فكتبتها وأرسلتها في رسالة له.

لم يكن غودل يجيب على الرسائل، وربما لم يكن ليجيب على رسالتي. لكن للمصادفة كنت أتابع حلقة دراسية يحاضر فيها المُنظِّر البارز في نظرية «البرهان» غايسي تاكيوتي في معهد الدراسات المتقدمة في برينستون، نيوجرسي. عرف غودل ذلك، وفي أحد الأيام عندما كنت في الحلقة الدراسية في مكتب تاكيوتي، اتصل هاتفياً وطلب رؤيتي.

كان مكتب غودل معتماً وغير مُضاء. واحتوى على سجاد وأثاث مريح. كان على المكتب كوب حليب فارغ. وكان غودل قصيراً جداً، لكن حضوره ترك انطباعاً عند زواره بأنه فارع الطول.

عُرف عنه قلقه الشديد حول صحته، وحرصه الدائم على نفسه. وكثيراً ما كان يُرى في فصل الشتاء مغادراً المعهد مع غطاء ملفوف حول رأسه.

شجعني في لقائنا على طرح أسئلتي، وشعرت بأني علاء الدين داخل كهف الكنز. سألته عن كل ما أمكن لعقلي أن يفكر به. أما عقله فكان سريعاً وخبيراً على نحو لا يُصدَّق. وبدا لي أنه، على مرّ السنين، فكّر في كل مشكلة فلسفية ممكنة في هذا الموضوع.

ناقش غودل الأفكار بحماسة وانفتاح الشباب، على الرغم من معرفته

20- تدعى هذه المخطوطة: «Some Considerations Leading to the Probable Conclusion that the True Power of the Continuum is Alef-Two». وأعطاني إياها إيريك إيليتوك. للمزيد عن هذه المخطوطة، انظر الهامش 4 في الفصل الثاني.

الواسعة. ولم يقابل أي عبارة ساذجة قلتها بسخرية، بل كان يتعجب قائلاً إن أي شخص يمكن أن يفكر في ذلك. كان الأمر كما لو أن سنين عزلته أنسته أن بقية الجنس البشري لم تكن تتقدم معه.

من الصعب معرفة سبب اختيار غودل أن يعيش معظم حياته في عزلة. على الرغم من أنه لم يكن يهودياً، إلا أن الحرب العالمية الثانية أجبرته على الهرب من أوروبا، وربما كان هذا سبب انزعاجه من البشر. مع ذلك، أحبّ الحياة في أمريكا، والوضع المريح في معهد الدراسات المتقدمة، وفرصة مقابلة أينشتاين، والحرية الاجتماعية العظيمة. لكنه قضى سنواته الأخيرة في صمت كان يزداد عمقاً باستمرار.

بعد أن دعاني غودل لرؤيته في المرة الأولى، ذهبت بنفسي في المرتين التاليتين. لم يكن الأمر سهلاً. راسلته عدة مرات مصراً على أن نلتقي مجدداً لنتحدث. وأخيراً اتصلت به لأقول ذلك مباشرة.

أجابني بحذر قائلاً: «عمَّ الحديث ؟» وعندما وصلت إلى مكتبه، نظر إلي بتعبير مليء بالنفور. لكن بعد طرح بعض الأسئلة، تلاشى الانزعاج وأفسح مجالاً لمحادثة مفعمة بالصداقة والحماسة مماثلة لمحادثتنا الأولى. ومع ذلك، بعد أن تعب في نهاية المحادثة، كان ينظر بمزيج من الخوف والشك، كما لو كان يقول: «ما الذي يفعله هذا الغريب في معتزلي؟»

كان غودل، قبل كل شيء، مفكراً عظيماً. لا يكمن جوهر المرء في الوصف المادي له، بل في أفكاره. وأودّ الآن أن أصف بعض مناقشاتنا حول الرياضيات والفيزياء والفلسفة.

أحد الأبحاث غير المشهورة لغودل صدر عام 1949 بعنوان «ملاحظة حول العلاقة بين نظرية النسبية والفلسفة المثالية»[21] في هذا البحث، الذي ربما تأثر بمحادثاته مع أينشتاين واهتمامه بفلسفة كانط، يحاول غودل إظهار أن مرور الوقت هو محض وهم، وأن ماضي الكون وحاضره ومستقبله ليست سوى مناطق مختلفة من النسيج الواحد والشاسع للزمكان. الزمن جزء من نسيج الزمكان، لكن الزمكان نفسه هو واقع أعلى موجود خارج الزمن.

21- انظر الهامش 16 أعلاه.

حاول غودل دحض فكرة الكون المقيد بالزمن الشبيه بسلسلة من الصور المتلاحقة. وقام من أجل ذلك ببناء وصف رياضي لكون مُحتمَل يمكن فيه السفر عبر الزمن إلى الماضي. كان دافعه يتمثل بفكرة أن إمكانية السفر عودة إلى العام السابق، تجبر المرء على الاعتراف بالوجود الحالي لما هو أكثر من مجرد اللحظة الآنية.

أثارت المفارقات التقليدية الكامنة في السفر عبر الزمن تشوشاً لدي. ماذا لو سافرت إلى الماضي وقتلت نفسي؟ إذا مت في وقت سابق، فلن أتمكن الآن من السفر إلى الماضي وقتل نفسي! وأزعجتني أيضاً فكرة أن يكون المستقبل موجوداً بالفعل، فحينها لن تكون هناك إرادة حرة[22].

لم يكن غودل مقتنعاً فحسب بأن المستقبل موجود فعلاً، بل أسوأ من ذلك، كان مقتنعاً بالإمكانية النظرية للتنبؤ بأفعال شخص معين.

إني أرفض فكرة وجود نظرية يمكن أن تتنبأ بأفعالي، لأني قادر على تعلم النظرية ثم فعل ما يناقض تنبؤها، وبالتالي أثبتُ أن النظرية خاطئة. وفقاً لملاحظاتي، كانت إجابة غودل على هذه العبارة هي: «يجب أن يكون من الممكن بناء نظرية كاملة تتنبأ بسلوك الإنسان، أي إنها تتنبأ اعتماداً على المعطيات الوراثية والبيئية بما سيفعله. مع ذلك، إذا علم شخص ماكر ما بهذه النظرية، فيمكنه التصرف بطريقة تنفيها. لذا أستنتج أن نظرية كهذه يمكن أن توجد، ولكن حينها لن يكون بإمكان أي شخص تعلمها. وبالطريقة ذاتها، أستنتج أن السفر عبر الزمن ممكن، لكن حينها لن يمكن لأي شخص أن يعود إلى الماضي ويقتل نفسه». وضحك ضحكته المميزة، وقال: «البديهة مهمَلة إلى حدّ كبير. المنطق قوي للغاية».

فيما يتعلق بالإرادة الحرة، قال في مناسبة أخرى:

«لا يوجد تناقض بين الإرادة الحرة والمعرفة المسبقة لما سيفعله المرء. إذا كان المرء يعرف نفسه تماماً، فهذا هو الوضع. لا يقوم المرء متعمِّداً بعكس ما يريد القيام به».

22- للمزيد حول مفارقات الزمن، انظر: Rudolf v.B. Rucker, «Faster than Light, Slower than Time», *Speculations in Science and Technology* 4, (Oct. 1981).

ناقشت مع غودل، إضافة إلى أسئلتي، بعض النظريات الفيزيائية الغريبة التي توصلت إليها. وشعرت بالرضا التام عندما هزّ رأسه بعد سماع إحدى نظرياتي الأولية، وقال: «هذه فكرة غير مألوفة. فكرة غريبة للغاية»[23].

هناك فكرة واحدة مركزية في فكر غودل ناقشناها بشيء من التفصيل. وتمثل الفلسفة الكامنة وراء عقيدة غودل، «إني أدرس الرياضيات الموضوعية». وبهذه العبارة، يقصد غودل أن الكائنات الرياضية موجودة على نحو مستقل عن أنشطة علماء الرياضيات، بالطريقة نفسها التي توجد فيها النجوم حتى لو لم يدرسها علماء الفلك. كانت الرياضيات بالنسبة لـغودل، وحتى رياضيات اللانهاية، علماً تجريبياً في الأساس.

وفقاً لهذا الموقف، والذي يسميه علماء الرياضيات «الأفلاطونية»، فإننا لا نخلق الكائنات العقلية التي نتحدث عنها. بدلاً من ذلك، نحن «نجد» هذه الكائنات، في مستوى أعلى يرى العقل فيه من خلال عملية لا تختلف عن الإدراك الحسي.

إن فلسفة الرياضيات التي تناقض الأفلاطونية هي الفلسفة الشكلية، المتسقة مع الوضعية. وفقاً للشكلية، الرياضيات في الواقع مجرد مجموعة متقنة من القواعد للتعامل مع الرموز. ومن خلال تطبيق القواعد على سلاسل «بديهية» محددة من الرموز، يصل العلماء إلى «إثبات» سلاسل محددة أخرى من الرموز لتكون «نظريات». إن لعبة الرياضيات مفيدة لسبب لا نعرفه بعد. فنحن نجد بعض سلاسل الرموز تعكس أنماطاً معينة في العالم المادي. مثلاً إن «2+2=4» ليست مجرد نظرية، بل نجد أيضاً أن إضافتنا تفاحتين إلى تفاحتين يجعل لدينا أربع تفاحات.

تبدأ المشكلة عندما نصل إلى الحديث عن أعداد لانهائية. لا يمكن تحديد مشكلة الاستمرارية لكانتور على أساس نظرياتنا الحالية في الرياضيات. يعني ذلك بالنسبة للشكليين أن سؤال الاستمرارية لا يملك إجابة محددة. أما الأفلاطونيون مثل غودل، سيقولون إن هذا يعني أننا لم «ننظر» بما فيه الكفاية إلى السؤال حتى نصل إلى جوابه.

23- الفكرة من السؤال هي المقياس الحلقي، كما نوقشت في قسم «اللانهائي في الصِّغَر».

في إحدى محادثاتنا، قمت بالضغط على غودل ليشرح ما يقصده بـ «العلاقة الأخرى مع الواقع»، والتي قال إن بإمكان المرء من خلالها أن «يرى» الكائنات الرياضية مباشرة. وأشار حينها إلى أن إمكانيات التفكير نفسها مفتوحة أمام الجميع، حتى نتمكن من معرفة العالم من الأشكال الممكنة موضوعياً ومطلقاً. الإمكانية مستقلة عن المراقب، وبالتالي فهي حقيقية، لأنها لا تخضع لإرادتنا.

يوجد تماثل خفي هنا. يعتقد الجميع أن مبنى «إمباير ستايت» في نيويورك حقيقي، لأن بإمكان أي شخص أن يذهب إليه ويراه. وعلى المنوال نفسه، يمكن لأي شخص يتعلم الرياضيات أن «يرى» مجموعة الأعداد الطبيعية بنفسه. لذا يعتبر غودل أن مجموعة الأعداد الطبيعية تملك وجوداً مستقلاً، وجوداً كإمكانية مجردة للفكر.

سألت غودل عن أفضل السبل لإدراك الاحتمال المجرد الخالص. وأجاب بثلاثة أمور:

1) يجب أولاً إغلاق الحواس الأخرى، مثلاً بالاستلقاء في مكان هادئ. لكن هذا الفعل السلبي لا يكفي، فيجب على المرء السعي بنشاط مع عقله.
2) من الخطأ إهمال احتمال الظرف الواقعي اليومي، والاكتفاء بتخيل التوليفات والتباينات للكائنات المادية. إن العقل قابل لأن يدرك مباشرة مجموعات لانهائية.
3) الهدف الأقصى لهذا الفكر، ولكل الفلسفة، هو إدراك المطلق. واختتم غودل تعليقاته بملاحظة عن أفلاطون، «عندما أدرك بلاوتوس الخير تماماً، انتهت فلسفته».

تشارك غودل وأينشتاين تحولاً صوفياً فكرياً. وبالرغم من انتقاص قيمة كلمة «صوفي» في أيامنا هذه، إلا أن التصوف لا يتعلق بالبخور واستحضار الأرواح. هناك فرق بين التصوف والسحر.

هناك سلسلة نقية من التصوف الكلاسيكي والتي تمتد من أفلاطون وأفلوطين وميستر إكهرت، إلى مفكرين عظماء مثل ألدوس هكسلي ود.

ت. سوزوكي. يدور تعليم التصوف حول فكرة مركزية هي: «الواقع واحد». وتتمثل ممارسة التصوف في إيجاد طرق لتجربة هذه الوحدة العليا مباشرة.

يُدعى هذا الواحد بأسماء مختلفة، كالخير أو الإله أو الكون أو العقل أو العدم أو (ربما كان الاسم الأكثر حيادية) المطلق. لا يوجد باب في متاهة العلم يوصل مباشرة إلى المطلق. ولكن إذا فهم المرء المتاهة جيداً، فيمكن أن يقفز خارج النظام ويعيش تجربة معرفة المطلق بنفسه.

كان آخر حديث لي مع غودل عام 1977، وكان اتصالاً هاتفياً. كنت أدرس مسألة إمكانية امتلاك الآلات فكراً خاصاً، وازداد اهتمامي بالتمييز بين سلوك نظام ما والعقل الكامن أو الوعي، إن وُجد.

ما أثار دهشتي هو أنه إذا أمكن لآلة ما أن تحاكي كل سلوكنا الداخلي والخارجي، فيبدو أنه لم يعد هناك شيء يُضاف إليها أكثر من ذلك. يُعتبر الجسم والدماغ أجهزة، بينما تُعتبر العادات والمعرفة والصورة الذاتية برامج تشغيل لهذه الأجهزة. إذاً، كل ما هو ضروري لنحصل على نظام حي موجود فعلاً.

بدأت أفكر أن الوعي ليس أكثر من وجود بسيط. لذا سألت غودل إذا كان يعتقد بوجود عقل واحد يتسبب بجميع المظاهر والأنشطة في العالم.

أجاب، نعم، العقل هو المنظِّم، لكنه موجود على نحو مستقل عن خصائصه الفردية.

بعد ذلك سألته إذا كان يعتقد أن العقل موجود في كل مكان، على عكس الاعتقاد بوجوده في أدمغة البشر.

رد غودل: «بالطبع، هذه هي ركيزة التعليم الصوفي».

تحدثنا قليلاً حول نظرية المجموعة، ثم سألته سؤالي الأخير: «ما سبب توهمنا بمرور الوقت؟»

لم يجب مباشرة، بل تحدث حول ما يعنيه السؤال، أي لِمَ نعتقد أن هناك مروراً محسوساً للوقت.

أشار إلى التخلص من الاعتقاد بمرور الوقت، وبذل الجهد لتجربة العقل الواحد الصوفية. وقال أخيراً: «إن الوهم بمرور الوقت ينشأ من الارتباك

بين المُفترض والواقع. يظهر مرور الوقت نتيجة تفكيرنا بأن نشغَل حقائق مختلفة. في الواقع، نحن نشغَل افتراضات مختلفة فحسب. توجد حقيقة واحدة فحسب».

أردت زيارة غودل مرة أخرى، لكنه أخبرني أنه مريض للغاية. في منتصف كانون الثاني عام 1978، حلمت أني كنت بجوار سريره.

كان هناك لوحة شطرنج أمامه على غطاء السرير. مدَّ غودل يده ونقر اللوحة وانقلبت حجارة الشطرنج على الأرض. توسعت رقعة الشطرنج وامتدت إلى اللانهاية، ثم اختفت. ظهرت مجموعة مختصرة من الرموز، ثم فراغ. امتد الفراغ حتى غمر الضوء الأبيض كل شيء.

في اليوم التالي علمت أن كورت غودل توفي.

نحو وعي الروبوت[24]

يقول كورت غودل[25]: «إن العقل البشري غير قادر على صياغة (أو مكننة) كل ما يدركه بحدسه الرياضي. أي إنه إذا نجح في صياغة بعض ذلك، فإنه يصل إلى معرفة بديهية جديدة، مثل اتساق هذه الشكلية. يمكن أن نسمِّي هذه الحقيقة «عدم اكتمال» الرياضيات. من ناحية أخرى، على أساس ما تمَّ إثباته حتى الآن، يبقى من الممكن أن توجد -أو يمكن اكتشافها تجريبياً- آلة تثبت النظرية، والتي تعادل في الواقع الحدس الرياضي، ولكن لا يمكن إثبات أنها كذلك، ولا يمكن إثبات أنها تعطي نظريات صحيحة فحسب عن نظرية الأعداد المنتهية».

امتد لسنوات عديدة جدال حول الأهمية الدقيقة لنظرية عدم الاكتمال في مجال الذكاء الاصطناعي[26]. كان غودل في سنواته الأخيرة رجلاً

24- يعتمد هذا القسم على حديث أجريته في مركز أبحاث توماس جون واتسون، ونُشر سابقاً كبحث يحمل العنوان نفسه: *Speculations in Science and Technology* *3* (June, 1980), pp. 205-217. وأوجه شكري لـغريغوري شيتين وتشارلز بينيت لدعوتهما لي، ولكوب أندرسن الذي شاركني بعض هذه الأفكار.

25- Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy* (New York: Humanities Press, 1974), p. 324. أخذ وانغ السؤال من نص غير منشور لمحاضرة عن جوزيه ويلارد غيبس أعطاها غودل في بروفيدنس رود آيلاند في 26 كانون الأول 1951.

26- تظهر العديد ذات الصلة من المقالات في: Alan R. Anderson, ed., *Minds and Machines* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964). انظر أيضاً: Howard DeLong, *A Profile of Mathematical Logic* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1971). وأيضاً الفصل العاشر من: Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy*.

منعزلاً، وحتى سرياً، والاقتباس أعلاه يضمّ كلماته المنشورة حول هذا السؤال المهم. والهدف من هذا القسم هو إبراز معنى ذلك الاقتباس وما يمكن أن ينتج عنه.

يحتوي القسم على أربعة أقسام فرعية. يصف القسم الفرعي الأول بدقة ما المقصود بآلة إثبات النظرية. ويطور الثاني حجة عدم معرفة الحقيقة، وكيف وصل غودل إلى الاستنتاج بأن البشر لا يمكنهم أبداً وصف كيفية تفكيرهم في الرياضيات وصفاً كاملاً. يشرح القسم الثالث كيف يمكن للآلات المعقدة التصميم أن تتطور. ويدعم القسم الرابع الإجابة الصوفية على السؤال «ما هو الوعي؟»

النظم والآلات الشكلية

يمكن القول بصورة عامة إن النظام الشكلي[27] عبارة عن مجموعة من الرموز مع قواعد تشغيلها. للنظام الشكلي أربعة مكونات: الأبجدية، الإملاء والقواعد، البديهيات، قواعد الاستدلال.

الأبجدية هي مصدر الرموز. إذا أراد المرء أن يكون مجرداً تماماً، فيمكنه الاعتماد على «0» و«1» كرمزين فحسب. ولكن عادة ما يتمّ الاعتماد أيضاً على الحروف الأبجدية الإنكليزية واليونانية الكبيرة والصغيرة، وعلامات الترقيم، والمساحة الفارغة، والرموز المنطقية المعتادة، والأرقام والرموز الرياضية الأخرى، وما إلى ذلك.

تحدّد قواعد الإملاء أيّ من سلاسل الرموز تُعتبر اسماً (مصطلحاً) وأي سلاسل تُعتبر فعلاً (علاقة). أما قواعد النحو فتحدّد أنواع الأفعال والأسماء

27- يُعرَّف النظام الشكلي (أو النظام المنطقي) عموماً بأنه أي نظام تفكير تجريدي قائم على نموذج رياضي. ويتكون من اللغة الشكلية مع نظام استقراء يتكوّن بدوره من مجموعة من القواعد الاستنتاجية و/أو البديهيات. ويُستخدم النظام الشكلي للوصول إلى تعبير منطقي من خلال واحد أو أكثر من التعابير الموجودة سابقاً. يُطلق على هذه التعابير اسم «بديهيات» ويُفترض أن تكون صحيحة، أو «نظريات» في حال تمّ استنتاجها. انظر: الموسوعة البريطانية: https://www.britannica.com/topic/formal-system. (المُترجِمة).

التي يمكن جمعها مع بعضها البعض لإنشاء جملة بسيطة، وكيف يمكن أن نبني جملة مركبة، وجملة بمقاييس كمية، وعبارة من جمل متعددة. تُدعى العبارة التي تُكوَّن وفق قواعد الإملاء والنحو «عبارة ذات صياغة جيدة».

يميِّز النظام الشكلي مجموعة معينة من العبارات ذات الصياغة الجيدة على أنها البديهيات أو الافتراضات الأساسية. وتحدِّد قواعد الاستدلال الطرق الدقيقة التي يمكن بها تغيير البديهيات وجمعها لـ «إثبات» نظريات النظام الشكلي.

لوصف ما سبق على نحو أكثر دقة، نقول إن العبارة A المُصاغة جيداً مُثبَتة من خلال النظام الشكلي إذا وفقط إذا وُجد تسلسل نهائي $M_1, \ldots M_n$ من العبارات المُصاغة جيداً، حيث إن M هي إما بديهية أو يمكن الحصول عليها من بعض الرموز السابقة بإحدى قواعد الاستدلال. وتكون M_n الأخيرة هي A. نستنتج من ذلك: أن نظرية النظام الشكلي هي عبارة A مُصاغة جيداً والتي يوجد لها إثبات يتكوّن من تسلسل من الرموز ينتهي بـ A.

إن نظريات النظام الشكلي موجودة بالفعل على نحو مستتر في بديهيات النظام وقواعد الاستدلال. يمكن عادة وصف النظام الشكلي نفسه بوصف نهائي، ولكن باستطاعته أن يثبت عدداً لانهائياً من النظريات. لذا يمكن اعتبار النظام الشكلي طريقة مضغوطة للغاية لتلخيص مجموعة كبيرة من الحقائق.

يمكن إثبات جميع نظريات الرياضيات الكلاسيكية بالاعتماد على بديهيات وقواعد استدلال النظام الشكلي، والتي حصلنا عليها من خلال الجمع بين حساب التفاضل والتكامل العادي والمسند، وبديهيات تسيرميلو-فرانكل (نظرية المجموعة حسب تسيرميلو وفرانكل). يمكن وصف هذا النظام الشكلي كاملاً في بضع صفحات مطبوعة. أي إن بإمكاننا ترميز كل ما نعرفه في الرياضيات في عدة صفحات.

لا يوجد فرع آخر من العلم سمح لنا بتدوينه كاملاً كنظام شكلي، ولكن توجد العديد من الجهود الجزئية الناجحة في هذا الاتجاه. على سبيل المثال، لدينا عدد الإلكترونات في كل ذرة، وقوانين الوراثة، ونظرية الكهرومغناطيسية، ونظرية النسبية الخاصة... وجميعها يمكن التعبير عنها على أنها أنظمة شكلية تنتج مجموعة من الحقائق.

تتضمن أبجدية كل نظام شكلي عادة رمزاً يُستخدم للنفي. ويُعتبر النظام متسقاً إذا لم يثبت أن قضية ما ونفيها صحيحان في الوقت ذاته. وهذا مطلب طبيعي، لأن النظام يهدف في الممارسة العملية إلى تلخيص مجموعة من الحقائق التي تحصل في عالم ممكن واحد أو جزء منه، ولا يمكن أن تتحقق القضية ونفيها في الوقت ذاته في الواقع.

يجب أن نتمكن أيضاً من وصف الأنظمة الشكلية بدقة وعلى نحو لا لبس فيه. وبقولنا إن النظام الشكلي قابل للوصف النهائي، فإننا نعني أن هناك ثلاثة إجراءات محددة، «جيد وبديهة وقاعدة»، تحدّد النظام على النحو التالي:

نطبّق «جيد» على أي سلسلة من الرموز المستمدَّة من أبجدية النظام لتحديد ما إذا كان التسلسل يكوِّن عبارة جيدة الصياغة. ثم نطبّق «بديهة» لتحديد ما إذا كانت العبارة بديهية أم لا. ونطبِّق الإجراء النهائي «قاعدة» على أي عبارة جيدة مع مجموعة محددة من العبارات الجيدة الأخرى، لتحديد ما إذا كانت الأولى تتبع الأخيرة وفقاً لأي قاعدة استدلال أم لا.

لن ندخل في التفاصيل التقنية، يكفي أن يكون الجانب الأساس من الإجراءات الخوارزمية «جيد، بديهة، قاعدة» ميكانيكياً تماماً من حيث التطبيق، ويعطي دائماً إجابة واضحة بـ«نعم» أو «لا» بعد فترة محددة من الوقت.

يمكن أن يُعتبر النظام الشكلي T، الذي يمكن وصفه وصفاً محدداً ونهائياً، على أنه آلة جدولة نظريات. أي إننا بالاعتماد على النظام الشكلي T القائم على الخوارزمية الثلاثية «جيد، بديهة، قاعدة»، يمكننا بناء الآلة M_T التي تطبع جميع نظريات النظام T، الواحدة تلو الأخرى.

يجب أن نلاحظ أولاً قبل وصف الآلة M_T أنه بالنظر إلى أبجدية ثابتة، يوجد إجراء ميكانيكي بالكامل لتوليد جميع «الكلمات» أو سلاسل الرموز المحتمَلة والمستمدَّة من تلك الأبجدية. على سبيل المثال، إذا كانت الأبجدية هي الأحرف الإنكليزية الصغيرة، فيمكن لإجراء ميكانيكي أن يجدول جميع الكلمات ذات الحرف الواحد وفق ترتيب القاموس، ثم ذات الحرفين، ثم ذات الأحرف الثلاثة... وهكذا.

الآن، ستعمل الآلة من خلال تكرار القائمة التالية من التعليمات لتوليد ثلاثة مخازن متزايدة باستمرار (*St, We, Th*)، والتي تتكوّن على التوالي من (سلاسل محتمَلة، عبارات جيدة الصياغة، نظريات). وفي الوقت نفسه، ستقوم الآلة بطباعة النظريات.

1. ولِّد السلسلة المحتمَلة التالية وأضفها إلى المخزن *St*.
2. تحقّق من السلسلة الأخيرة بالإجراء «جيد». إذا كان الجواب «نعم»، فأضف السلسلة إلى المخزن *We*.
3. تحقق من السلسلة الأخيرة في المخزن *We* بالإجراء «بديهة». إذا كان الجواب «نعم»، فأضف السلسلة إلى المخزن *Th*.
4. تحقق من قابلية كل عناصر *We* من الاشتقاق من عناصر المجموعة *Th* بالإجراء «قاعدة». أضف كل جملة يكون جوابها «نعم» إلى المخزن *Th*، واطبع كل من هذه النظريات الجديدة على شريط الإخراج.
5. عُد إلى (1).

توجد نظرية عامة لنظرية الوظيفة العودية[28] تنصّ على أنه بالإمكان اعتبار أي نظام شكلي على أنه آلة، والعكس صحيح. يعني ذلك أنه لأي جهاز حاسوب رقمي *M* مع ذاكرة غير محدودة، هناك نظام شكلي T_M، حيث مخرجات الحاسوب هي نظريات النظام. ولا يقتصر الأمر على الآلات التي يمكنها طباعة قوائم من النظريات، بل ينطبق أيضاً على الآلات التي تُظهِر أنماط سلوك متشعب، وحتى بالنسبة للآلات التي تتفاعل مع بيئتها.

تتصف الآلة النموذجية باللاحتمية، لكن ذلك لا يأتي بالمعنى الضعيف

28- نظرية العودية، والمعروفة أيضاً بنظرية الحوسبة، هي فرع من المنطق الرياضي وعلم الحاسوب يدرس إمكانية حل المسائل المطروحة بكفاءة بوساطة الحاسوب. وتُقسم إلى النظرية الحاسوبية ونظرية التعقيد الحسابي، ويتعامل كلاهما مع النماذج الرياضية للتحسيب. انظر: *Computability Theory and Applications: The Art of Classical Computability*, by Robert Irving Soare, Department of Mathematics, The University of Chicago, VOLUME I, December 22, 2011. (المُترجِمة).

للكلمة، أي إنها تملك احتمالات متشعبة للمستقبل. تبدأ الآلة في حالة أولية (مقارنة البديهيات)، ثم تمرّ عبر سلسلة من التحولات وفقاً للقواعد المبرمَجة (مقارنة قواعد الاستدلال). يمكن أن تكون الآلة لاحتميةً بمعنى أنه في حالات معينة، توجد مجموعة متنوعة من «الحالات التالية» المسموح بها. وأود هنا أن أوضح نقطة، حتى إذا سمح المرء باختيار المرحلة التالية على نحو عشوائي، فإن نطاق المخرجات المحتمَلة للآلة لا يزال مكافئاً لمجموعة النظريات المحتمَلة لنظام شكلي.

إن سبب ذلك يعود إلى أن النظام الشكلي لا ينشئ بنفسه قائمة من نظرياته. النظام الشكلي هو -على نحو صارم- الجشطالت[29]، أو حالة البداية التي يمكن للمرء أن يخرج منها عبر تسلسل إثبات متنوع محتمَل للوصول إلى نظريات متنوعة محتمَلة. وبالتالي فإن الشكل الأساس للنظام الشكلي يشبه شجرة أكثر منه خطاً. في قاعدة الشجرة نجد البديهيات، التي تنمو منها جميع الإثباتات ذات الخطوة الواحدة، ثم الخطوتين، وهكذا. هناك في كل عقدة أو تفرُّع من هذه الشجرة ناتج محتمَل للنظرية.

مع ذلك، لنفترض أن لدينا آلة M تتفاعل مع بيئتها. ونعتبر أنها تجسّد وظيفة سلوكية من الشكل $M(h,i)=o$. يشير الحرف h إلى تاريخ ما حدث للآلة M منذ تشغيلها، ويشير الحرف i إلى التنبيهات أو المدخلات في الوقت الحالي، ويشير o إلى الاستجابة أو المخرج الذي تعطيه الآلة M ذات التاريخ h عندما نعطيها المدخل i. وكما ذكر أعلاه، يمكن أن يوجد عدة مخرجات محتمَلة. والآن، إذا افترضنا أن بإمكاننا تحديد التاريخ والمدخلات والمخرجات من خلال سلاسل من الرموز، فليس من الصعب عندها رؤية أن سلوك الآلة M قابل للترميز في نظام شكلي T_M، والذي يحتوي على سلاسل متنوعة من الشكل $M(h,i)=0$ على أنها نظرياته.

29- الجشطالت هي مدرسة من مدارس علم النفس التي اهتمت بقوانين الإدراك، وتوصلت إلى قانونه الأساس «الكل أكبر من مجموع أجزائه». انظر: نظريات الإرشاد والعلاج النفسي، عمان: دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع. (المُترجِمة).

مفارقة الكاذب وعدم قابلية الرياضيات للمكننة

دعونا نعُدْ إلى فكرة آلة جدولة النظريات، وهي آلة ذات وصف نهائي ومحدّد تطبع عدداً لانهائياً من العبارات. لا بدّ أن تتمكن أفضل آلة لجدولة النظريات من طباعة كل العبارات الصحيحة التي يمكن التعبير عنها (لنقُل باللغة الإنكليزية فحسب بالإضافة إلى رموز الطباعة التقليدية). ستكون آلة حقيقة عالمية رائعة حقاً. وبمجرد أن نبتكر إجراءاتها المنتهية والمحددة «جيد، بديهة، قاعدة»، يمكننا أن نبدأ بتشغيلها ونشاهد ما ستخرجه لنا. وأي عبارة سنحتار في صحتها أو خطئها، يمكننا أن نجلس بهدوء وننتظر أن تطبع الآلة لنا الجواب.

قبل أن نتابع نقاشنا، يجب أن نكون أكثر دقة حول نوع السلسلة التي نحتسبها جملة «مُصاغة جيداً»، والتي يمكن أن نقرر إذا كان صحيحة أم خاطئة.

أولاً، ليس على الجملة أن تتكون من وحدة نحوية واحدة بالضرورة. أي إن الجملة قد تتكوّن من عدة جمل أو من فقرة كاملة أو كتاب أو حتى عدة كتب. يجب أن يشكّل مجموع الرموز كلها توكيداً واحداً يمكن أن يقبل الحكم عليه بالصحة أو الخطأ. ومع ذلك، لن تُقبل السلاسل اللانهائية من الرموز على أنها جُمل، لأن الجملة يجب أن تكون، على الأقل نظرياً، قابلة للنفي.

ثانياً، إن السلسلة «x أصغر من y» ليست جملة بحد ذاتها؛ فإذا لم يُحدد كل من x وy، لا يمكننا القول إن هذه الجملة تعبّر عن حقيقة أم لا. لذا يجب ألا تتضمن الجملة أي مصطلحات أو علاقات غير محددة.

تظهر لدينا مشكلة هنا؛ فما معنى التعبير «أصغر من»؟ ألا يجب أن يكون محدداً أيضاً؟ لكن إذا كان علينا تفسير كل مصطلح وعلاقة، وكل اسم وفعل، سنواجه فوضى حقيقية. ستأخذ الجملة شكل توكيد أولي، تليها تعريفات الكلمات المستخدَمة فيه، ثم تليها تعريفات الكلمات المستخدَمة في التعريفات الأولى، ثم تليها تعريفات الكلمات المستخدَمة في التعريفات الثانية، ... وهكذا.

حسناً... لِمَ لا؟ هذه هي متعة التفكير المجرد. من خلال منع النكوص غير الضروري، نحدّد أنه في أي جملة لا حاجة لتكرار تعريف كلمة ما. ونظراً لوجود عدد محدد من الكلمات ومخططات بنائها في اللغة الإنكليزية، يجب

أن تكون العملية منتهية أيضاً. مع ذلك، يمكن أن توجد بعض الحالات التي يصبح فيها الامتداد الكامل لجملة ما لانهائياً، وعندها نعتبر الجملة «غير مُصاغة جيداً»، وليست جملة في الواقع.

يمكن الاعتراض على الجملة الممتدة بأنها تتكوّن من تسلسلات دائرية للتعريفات وبالتالي ستكون بدون معنى. وهناك ردان على هذا الاعتراض. أولاً، أي تعريف دائري أكثر تعقيداً من «x هو x» يحقق وظيفة نقل بعض المعلومات. مثلاً، تخبرنا تعاريف إقليدس الدائرية أن الفضاء هو مجموعة من كل النقاط والنقطة هي مساحة من الفضاء لا أجزاء لها، وأن النقطة لا يمكن أن تتكوّن من عدد من النقاط. ثانياً، يمكن استخدام سلاسل من الرموز لإظهار مفاهيم معينة بدون الحاجة إلى تعريفها حقاً. على سبيل المثال، يمكن أن نوضح مفهوم طول سلسلة من الرموز بالقول «xxx» أطول من «a». ومن خلال ذكر مثل هذه الأمثلة (على نحو تخطيطي) يمكن توضيح معنى «طول سلسلة»[30].

لذا سنقوم بتمديد الجمل لتكون ذاتية التفسير. عندما نقوم بذلك، فإن جملة مثل «الجذر التربيعي للعدد 2 غير منطقي» ستنمو لتشمل الرياضيات كلها، وجملة مثل «كل الناس فانون» ستمتد لتشمل تعريفاً لمعظم كلمات اللغة الإنكليزية.

لكن القائمة البسيطة لتعريفات القاموس لن تكون كافية دائماً لتحديد جملة تحديداً يمكّننا من تقرير صحتها أو خطئها. لنقرّر إذا كانت جملة «جيمي كارتر جيد» صحيحة أم خاطئة، يجب أن نعرف معيار «الجيد» المقصود. هل نعني أنه رجل متدين، أو يستحق أن ننتخبه مجدداً، أو أن مظهره جميل؟ يجب أن نختار أحد الاحتمالات الممكِنة العديدة لتحديد معنى الجملة.

لنعُد الآن إلى مفهوم آلة الحقيقة العالمية. من السهل علينا إثبات عدم

30- تظهر محاولة مثيرة للاهتمام بلغة تشرح نفسها في: Hans Freudenthal, *LINCOS: Design of a Language for Cosmic Intercourse* (Amsterdam: North-Holland, 1960).

إمكانية وجود مثل هذه الآلة، كما في الحجة التي ذكرناها في قسم «نظرية غودل لعدم الاكتمال».

لنفترض أن لدينا آلة مرشَّحة لتكون آلة الحقيقة العالمية، وتعتمد على الإجراء الثلاثي «صحيح، بديهة، قاعدة». الآن، يجب أن نتمكن من بناء جملة جيدة الصياغة تقول: «لن تقوم هذه الآلة المعتمِدة على الإجراء «صحيح، بديهة، قاعدة» بطباعة هذه الجملة أبداً»[31].

كما ذكرنا من قبل، ستوقع هذه الجملة الآلةَ في مفارقة لن تخرج منها.

إن الحقيقة غير قابلة للوصف؛ قدَّم لنا ذلك حلاً لمفارقة الكاذب التي ناقشنها في قسم «ما هي الحقيقة؟» ويفرض أن سلسلة معينة من الرموز B، حيث «لا يمكن للسلسلة B أن تعبِّر عن جملة مُصاغة جيداً وصحيحة»، فمن الواضح أن من غير الممكن توسيع B لتكوين جملة مُصاغة جيداً وصحيحة، لأن مثل هذه الجملة لا تصُح إلا إذا لم تكن كذلك. أما السبب في عدم إمكانية صياغة B على نحو جيد، فهو أن التوسيع يجب أن يشمل التفسير الكامل لجميع الكلمات المستخدَمة في B، ويتضمن ذلك التفسير الكامل لـ «صحيحة»، التي لا يمكن احتواؤها بأي تفسير منته ومحدود! نستنتج إذاً أن B جملة إذا قمنا بتوسيعها لتكون مفهومة تماماً، ستصبح لانهائية الطول؛ والسلاسل اللانهائية الطول من الرموز لا تُعتبر جُملاً، لذا ما من مفارقة هنا. إذا كانت B منتهية الطول، فإنها ستكون صحيحة إذا وفقط إذا لم تكن صحيحة، ولكن B لانهائية الطول، إذاً هي ليست جملة، وبالتالي انتهت القصة هنا. ومع أن ذلك يوحي بوجود مفارقة، إلا أن ذلك محض وهم.

إذاً، إن مفهوم حقيقة جملة منتهية هو بحدّ ذاته لانهائي. قد يميل المرء الآن إلى السؤال عن وجود مفهوم أسمى للحقيقة يحكم كل جملة، سواء

31– إذا حصل اعتراض على استخدام العبارة المرجعية الذاتية «هذه الجملة»، فيمكن أن نعيد صياغة العبارة لتجنب ذلك. مثلاً: ««ينتج عن إلحاق الاقتباس الخاص به جملة تقول إن هذه الآلة التي تعتمد على الإجراء «صحيح، بديهة، قاعدة» لن تطبع أبداً» ينتج عن إلحاق الاقتباس الخاص به جملة تقول إن هذه الآلة التي تعتمد على الإجراء «صحيح، بديهة، قاعدة» لن تطبع أبداً». تنسب هذه الحيلة إلى ويلارد فار أورمان كواين. للمزيد، انظر الهامش 33 في الفصل الثالث.

كانت منتهية أم لانهائية؟ جوابي: ليس في هذا العالم. ومن وجهة نظر أخرى، الرسالة في مفارقة الكاذب هي أنه لا يمكن للمرء أبداً تعريف الحقيقة بطريقة يمكن أن تنطبق على جمل تنطوي على مفهوم يعرِّف الحقيقة.

سأذكر هنا مثالاً طريفاً. يوجد في كنيسة سانتا ماريا في روما، قرص حجري ضخم. نُقش على القرص وجه رجل مُلتحٍ يفتح فمه قليلاً. تقول الأسطورة إن من يضع يده في فم النقش ويقول جملة كاذبة، سيطبق الفم الحجري على يده. لكنني ذهبت إلى هناك وقمت بتجربة؛ وضعت يدي في الفم الحجري وقلت «سيطبق الفم الحجري على يدي». لا بد أن النقش وقع في حيرة أمام هذه المفارقة.

ليس غريباً ألّا توجد مجموعة من القواعد تكفي لتوليد كل الحقائق الممكنة. الواقع أن هناك شيئاً ما يمنع وجود القواعد التي يمكن أن تصف العالَم كاملاً. لكن الغريب أن هذه الظاهرة تنطبق أيضاً على العالَم الصغير والمنظَّم لنظرية الأعداد.

تظهر الأعداد الطبيعية، مع علاقاتها وعملياتها من مساواة وجمع وضرب، معقدة للغاية. وأمام عجزنا من الوصول إلى وصف محدّد لجميع الجُمل الصحيحة، قد نحاول الوصول على الأقل إلى وصف محدّد لكل الحقائق حول الأعداد الطبيعية. لكن، وفقاً لنظرية عدم الاكتمال، يستحيل ذلك أيضاً.

تذكر نظرية غودل أن جميع الأنظمة الشكلية من نوع معين تخضع لاثنين من المحددات. وتنطبق نتائجه عل أي نظام شكلي T يكون: قابلاً لوصف نهائي ومحدد، ومتسقاً، وقوياً بما يكفي لإثبات الحقائق الأساسية حول حساب العدد الصحيح (غير الكسري).

تنصّ نظرية غودل الأولى عن عدم الاكتمال على عدم وجود مثل هذا النظام الشكلي الذي يمكنه تحديد صحة كل جملة حول الأعداد الطبيعية. أي إنه بالنسبة لأي نظام، ستوجد جملة حول الأعداد الطبيعية لا يمكن لنظرية من نظريات النظام تأكيدها أو نفيها. كما ذكرنا سابقاً، لا يمكن لأي نظام تحديد صحة الجملة «هذه الجملة ليست صحيحة».

الجزء الصعب في برهان ذلك رياضياً هو تحويل الجملة إلى لغة الأعداد الطبيعية. طوَّر غودل تقنية تُعرف الآن بـ«ترقيم غودل»، والتي ترمز للتعابير الشكلية بأعداد طبيعية، بما يشبه عملية الترميز الموضحة في «مكتبة بابل». وحوَّل الجملة «الآلة لن تثبت أن هذه الجملة صحيحة» إلى جملة رياضية بحتة، تنصّ على أنه توجد معادلة كثيرة الحدود ليس لها حلول من الأعداد الصحيحة.

النتيجة هي أن أي نظرية منتهية وقابلة للوصف ومتسقة، غير قادرة على تقديم وصف كامل للأعداد الطبيعية؛ فلكل نظرية T، توجد جملة $G(T)$ حول الأعداد الطبيعية، ولا يمكن للنظرية T إثباتها أو دحضها[32].

أما بالنسبة لنظرية عدم الاكتمال الثانية، فيجب أن نذكر أن الشرط «نظرية متسقة» يعني عدم وجود جملة يمكن للنظرية أن تثبتها وتدحضها في الوقت نفسه. ويمكن اختصار هذا الشرط بـ $Con(T)$ أو تناقض (T). وباستخدام ترقيم غودل يمكننا تحويل العبارة $Con(T)$ إلى جملة رياضية بحتة تقول إنه توجد معادلة كثيرة الحدود ليس لها حلول من الأعداد الصحيحة.

تجسّد النظرية وصفاً صحيحاً للكون الرياضي، لذا نتوقع أن يكون اتساقها حقيقة واضحة ويمكن استنتاجها بسهولة. ولكن نظرية عدم الاكتمال الثانية تقول إن النظرية التي تفي بالشرطين: قابلة لوصف نهائي ومحدد، وقوية بما يكفي لإثبات الحقائق الأساسية حول حساب العدد الصحيح (غير الكسري)، لن تفي بالشرط الثالث، وهو الاتساق.

يقوم الإثبات على العودة إلى إثبات نظرية غودل الأولى. يقتضي الإثبات الأول أن «اتساق النظرية يتضمن الجملة $G(T)$». لكن النظرية لا يمكنها أن تثبت صحة الجملة $G(T)$، لذا لا يمكن إثبات صحة اتساق النظرية أيضاً.

يمكننا الآن فهم الجزء الأول من اقتباس غودل الذي بدأنا به. وكما ذكرت

32- يمكن قراءة المزيد حول برهان غودل في التدريب الثاني. ولمعالجة دقيقة لهذا الموضوع، انظر: see C. Smorynski, «The Incompleteness Theorems», in J. Barwise, ed., *Handbook of Mathematical Logic* (Amsterdam: North-Holland, 1977), pp. 821-865. كما تظهر إحدى أولى المحاولات لمعالجة نظرية عدم الاكتمال في: E. Nagel and J. Newman, *Gödel's Proof* (New York: New York University Press, 1958).

في قسم «محادثات مع غودل»، تبنَّى غودل وجهة النظر التي تقول إن الأعداد الطبيعية والمجموعات اللانهائية والكائنات الرياضية جميعها غير مادية، لكنها موجودة فعلياً ككيانات مستقلة. ومن خلال ما أسماه غودل «الحدس الرياضي»، نتعلم نحن البشر حقائق معينة عن عالَم الرياضيات، كما نتعلم بعض الطرق الصحيحة لاستنتاج حقائق معينة من حقائق أخرى. اعتبر غودل اعتماداً على ذلك أن الحدس الرياضي عملية موثوقة تماماً مثل الإدراك الحسي العادي[33].

الآن، بما أن الحقائق وطرق الاستنتاج التي نتعلمها بالحدس الرياضي هي أوصاف صحيحة لعالَم رياضي موجود فعلاً، فلا احتمال أبداً لإنتاج تناقض في الرياضيات. فلن نجد أنفسنا أبداً، خلال اعتمادنا على هذه الأسس، نثبت أن الصفر لا يساوي الصفر. وبعبارة أخرى، في أي وصف لمعرفتنا الرياضية الحالية، يمكننا التأكد من اتساق هذه المعرفة.

لكن نظرية عدم الاكتمال تشير لأمر آخر. لنفترض أننا توصلنا إلى وصف محدّد ومنته لنظرية تلخِّص كل معرفتنا الحالية في الرياضيات. من ناحية، ومن خلال اعتبارات الفقرة الأخيرة، نعلم أن هذه النظرية متسقة. ولكن من ناحية أخرى، وحسب نظرية عدم الاكتمال الثانية، إذا استوفت هذه النظرية الشرطين فلن تستوفي الشرط الثالث، وبالتالي لا يمكن إثبات أن النظرية متسقة!

لهذا السبب يقول غودل إن العقل البشري غير قادر على مكننة حدسه الرياضي كله. لأن مكننة هذا الحدس يعني إنتاج وصف محدّد ومنته لمعرفتنا كلها، وبمجرد أن نصل إلى هذا الوصف، سيظهر لنا حدسنا الرياضي أن هناك حقيقة، وهي اتساق الوصف، لا يمكن للوصف المُمَكنَن أن يثبت صحتها. لذا لا يمكن لأي نظام آلي أن يثبت كل الحقائق التي ندركها بحدسنا الرياضي.

33- انظر قسم «اللانهاية ومشهد العقل»، وقسم «محادثات مع غودل»، وأحد أبحاثي: The Actual Infinite, *Speculations in Science and Technology 3* (April, 1980), pp. 63-76. إنه لأمر مقلق أن يشكك العديد من علماء الرياضيات والفلسفة في وجود مثل هذا الحدس الرياضي غير العقلاني. وما لم نؤمن بوجود الحدس، فلن نقبل حجة غودل الموضَّحة في هذا القسم.

الذكاء الصنعي وعملية التطور

دعونا نناقش الآن الجزء الثاني من ملاحظة غودل. يشير غودل إلى أنه بالرغم من عدم إمكانيتنا كتابة برنامج لآلة إثبات النظريات والتي تعادل الحدس البشري، فمن الممكن أن توجد هذه الآلة وحتى أن تُكتشف تجريبياً.

لنفترض أن هناك آلة R تكافئ الحدس الرياضي البشري. أول حقيقة يجب إثباتها أننا لا نستطيع أبداً فهم برنامج هذه الآلة. ولنوضح هذه النقطة أكثر.

1) يمكن وصف الآلة R بدقة لكونها آلة إثبات نظريات.
2) نظراً لأن الآلة تكافئ حدسنا الرياضي المتسق مسبقاً حول الكون الرياضي، فإنها متسقة.
3) الآلة قوية، للأسباب ذاتها، بما يكفي لإثبات الحقائق الأساسية لحساب عدد صحيح.

لكننا نعرف من خلال نظرية عدم الاكتمال، أنه لا يمكن للآلة أن تثبت أنها متسقة.

بما أننا أثبتنا أن الآلة التي تكافئ الحدس الرياضي البشري غير قادرة على إثبات اتساقها، فيجب ألا يتمكن البشر أيضاً من إثبات اتساق تفكيرهم. ويحدث هذا عندما لا يمكن للبشر أبداً فهم وصف محدود ومنته للآلة التي يجب أن تكافئ حدسهم الرياضي. ولكننا نعرف -بواسطة حدس علوي آخر- أن هذا الحدس متسق. ومن المفروض أن أسباب عدم قدرتنا على فهم برنامج الآلة تكمن في طول هذا البرنامج ودقته.

لكن كيف يمكننا بناء آلة نعرف أننا لن نقدر أبداً على فهمها؟

الجواب هو: التطور.

عمل جون فون نيومان، قبل موته المبكر عام 1957، على صياغة النظرية الأساسية لأتمتة النسخ الذاتي[34]. لا يوجد أي صعوبة نظرية في تصميم

34- John von Neumann, *Theory of Self-Reproducing Automata* (Urbana: University of Illinois Press, 1966). ناقش جون فون نيومان أيضاً أساليب المنافسة والطفرة والتطور. ولشدة اهتمامي وتفكيري في هذه الفكرة، كتبت رواية عن تطور الروبوتات: Rudy Rucker, *Software* (New York: Ace Books, 1982). ويظهر اقتباس من هذه الرواية في: Douglas Hofstadter and Daniel

روبوتات قادرة على بناء روبوتات أخرى. ولا توجد صعوبة أيضاً في ترتيب إجراءات تمكّن الروبوتات القديمة من نسخ برامجها الخاصة في الروبوتات الجديدة. يتعلق الأمر ببساطة بتجميع الأجزاء الصلبة للجهاز الجديد، ثم نسخ البرنامج عليه.

يهدف تصميم شركة *IBM* الحالي، وهي الشركة العالمية متعددة الجنسيات الرائدة في مجال تصنيع وتطوير الحواسيب والبرمجيات، إلى بناء أجهزة حاسوب فائقة التبريد تتناسب مع صندوق ذي سعة 8*8*10 سم، وتضمّ ذاكرة تخزين مؤقت تتسع لـ 64 مليون و256000 كلمة في الذاكرة الرئيسية. سيتم تمثيل كل «بت» بكمية من التدفق المغناطيسي المتولد عن تيار مستمر عبر قاطع جوزيفسون فائق التوصيل. ليس من المستبعد أن يتمكن الجيل التالي من أجهزة الحاسوب من إدخال 10^{10} كلمة مميزة في عقل الإنسان.

لنتخيل الآن تجهيز بضعة آلاف من الروبوتات بأدمغة مصنوعة من السيليكون بدرجة حرارة الهيليوم السائل ووضعها على سطح القمر. سنبرمج هذه الروبوتات لاستخراج وصهر وتصنيع جميع المواد اللازمة لبناء مزيد من الروبوتات. وفي جو القمر المناسب لها: درجة الحرارة المنخفضة، والطاقة الشمسية الوفيرة، وندرة بخار الماء والأوكسيجين اللذين يمكن أن يسببا تآكلها، ووفرة السيليكون، ستزدهر هذه الروبوتات وتتكاثر.

إذا افترضنا أن برمجتها تتضمن منح الأولوية للتناسخ الذاتي، فستجري منافسة حتماً فيما بينها للحصول على المواد الخام، مع ما يرافق ذلك من عملية انتقاء تماثل الانتقاء الطبيعي. بالإضافة إلى ذلك، يمكننا ضمان حدوث طفرات طبيعية في برامج هذه الروبوتات، وذلك عن طريق وضع أمر بعدم نسخ البرنامج نفسه تماماً، بل بتغيير عشوائي في كل مرة. ويمكن أن

Dennett, *The Mind's I* (New York: Basic Books, 1981). كما عالجت أبحاث أخرى فكرة الاستنساخ الذاتي للروبوتات، مثل: Edward F. Moore, «Artificial Living Plants», *Scientific American* (October, 1956), pp. 118-126. وتطرح هذه المقالة فكرة وضع مصافي عائمة في البحر للروبوتات ذاتية التكاثر. ويتم حصاد المصافي الإضافية دورياً واستخدامها كمواد خام.

تستند العشوائية إلى أمور مختلفة، كحساب الأشعة الكونية مثلاً، أو التلويح بمغناطيس قوي فوق كل روبوت جديد.

في الواقع، إن جزءاً كبيراً من التنوع التطوري ينشأ لا من التحول الجيني، بل من اختلاط الجينات المتأصلة في كل من الزوجين اللذين يقومان بالتكاثر الجنسي. ويمكن ترتيب ذلك مع الروبوتات، من خلال عملية يجمع فيها اثنان من الروبوتات أجزاءهما الصلبة لدمج مختلف برامجهما معاً لإنتاج برنامج جديد لروبوت جديد.

يمكننا البدء بمشروع من هذا النوع في المختبر، بدلاً من إرسال أجهزة بمليارات الدولارات إلى القمر على الفور. ولن يكون من الضروري في البداية التعامل مع أجهزة قادرة على التكاثر الذاتي المادي. بدلاً من ذلك، يمكن كمرحلة أولى إطلاق عملية تنافس بين آلاف من برامج الذكاء الصنعي (على أساس درجات في اختبارات معينة مثلاً) من أجل تقرير أي منها يستحق أن يستنسخ نفسه في نسخة واحدة تتضمن بالتأكيد بعض الطفرات العشوائية. كما يمكننا تسريع هذه العملية بما يكفي لظهور تأثيرات تطورية كبيرة بعد بضع سنوات فقط من بداية العملية.

عندما تصبح البرامج معقدة لدرجة أنها لم تعد مفهومة، أو مفهومة بصعوبة كبيرة، يمكن وضعها في روبوتات مصمَّمة لبناء روبوتات أخرى وشحنها إلى القمر. إن الدافع الأساس في إرسالها إلى القمر هو الرغبة باستغلال موارده، فمن الممكن أن تكون التكلفة الإنتاجية للروبوتات هناك أفضل من تكلفة المستعمرين من البشر[35].

لكن استمرار تطور الروبوتات على القمر يواجه خطر الانقراض نتيجة سلسلة تعيسة من الطفرات المشوهة. وأمام هذه المشكلة، قد نفكر بتوفير حماية من طفرة قاتلة من خلال الحفاظ على بعض الأقسام الأساسية الداعمة لحياة الروبوتات بدون أن تُمَس أثناء التطور. لكن ذلك لا يجدي نفعاً، فالطفرة

35– Georg von Tiesenhausen and Wesley A. Darbro, «Self-Replicating Systems-A Systems Engineering Approach», *NASA Technical Memorandum TM-78304*, (Marshall Space Flight Center, Alabama, 1980).

المُميتة الآن قد لا تكون مميتة للأنواع المستقبلية، والعكس صحيح. الرئتان، على سبيل المثال، سيئة للغاية للأسماك، ولكنها جيدة جداً للبرمائيات.

لكن بافتراض أن كل شيء سيسير على ما يرام، وأن الإله سيرعى تطور الروبوتات كما رعانا، حينها ستوجد في نهاية المطاف حضارة روبوتية كبيرة ومستقلة على القمر. ربما ستهتم بعض الروبوتات هناك بالرياضيات، وعندها يوجد احتمال حقيقي لقيام هذه الروبوتات بإنشاء آلة إثبات نظريات (عالِم رياضيات روبوتي)، والتي تكافئ قدراتها مصادر الحدس الرياضي البشري.

لا يوجد سبب يمنع آلة إثبات النظريات من طباعة برنامجها لنا، ربما بشكل مضغوط ومرمَّز للغاية (مثل خلايا الحيوانات المنوية!). ولكن، كما ناقشنا أعلاه، لن نتمكن أبداً من إثبات أن نظرية الآلة متسقة. والأمر المثير للاهتمام، أننا بالرغم من عدم إمكانية فهمنا للبرنامج، إلا أن بإمكاننا تهيئة الظروف المادية التي تؤدي إلى ظهوره في الوجود.

وعي الروبوت

مع وضعنا نموذج القسم الفرعي الأخير في الاعتبار، تبدو الإمكانية واضحة لوجود روبوتات تسلك سلوك البشر. قد تفكر هذه الروبوتات في أسلافها التي تطوّرت على أساس المعدن والسيليكون كما نفكر نحن في الكائنات التي تطوّرت على أساس من الأحماض الأمينية ومركبات الكربون الأخرى. هل يمكننا القول إن هذه الروبوتات المتطورة للغاية تملك وعياً بالمعنى نفسه للوعي البشري؟

يتفق معظم الناس، عند التفكير العميق، على أن الإنسان يتكون من ثلاثة أجزاء متميزة: 1) الأجزاء الصلبة (الجسد والدماغ)، 2) البرامج (الذكريات والمهارات والآراء والسلوك)، 3) الوعي، الشعور بالذات أو الهوية الشخصية؛ الوعي الصافي؛ شرارة الحياة؛ أو حتى الروح.

أود أن أجادل أن أي مكون من الأجزاء الصلبة والبرامج قابل للاستبدال أو التغيير بدون التأثير بالفعل على الوعي. وسيكون هدفي في هذا الجدال إظهار أن الوعي لا يتعلق بالفرد.

لنبدأ بالأجزاء الصلبة. عند استبدال ساق شخص ما، أو كليته أو قلبه، بأخرى اصطناعية، فإن الشخص يبقى نفسه. أتحفظ على احتمال أن نتمكن يوماً ما من تصنيع دماغ جديد. ولكن يمكن لذلك أن يحدث عن طريق تسجيل التركيب الفيزيائي والكهربائي والكيميائي الحيوي للدماغ باستخدام التصوير ثلاثي الأبعاد بأشعة الليزر، ثم نقل هذا التركيب على نحو مطابق إلى نظام كبير من رقاقات السيليكون أو إلى وحدة مناسبة من الأنسجة المُستَنبَتة. يُفترض أن يشعر الشخص الخاضع لعملية النقل هذه بتجربة تشبه فقدان الوعي لفترة وجيزة، بعد ذلك سيتمكن من التفكير كما كان من قبل. ويمكن أن نقارن العملية بوضع برنامج معين في حاسوب جديد[36].

لنناقش الآن البرامج. من المألوف لنا أن نستذكر سلوكنا قبل سنة أو شهر أو ساعة ونُصاب بالدهشة. تتغير شخصية المرء باستمرار، ويتعلم دائماً أشياء جديدة وينسى أشياء قديمة. ونذكر هنا أيضاً المثال المتطرف لغسل الدماغ، الذي نعتبر فيه أن الهوية الأساسية للشخص لا تتغير حتى لو مُسحت ذكرياته وأُعطي مجموعة من الذكريات الزائفة تماماً.

ماذا يبقى للوعي إذاً؟ أقول إن المجموع الكلي للوعي الفردي هو الشعور المجرد بالوجود، المُعبَّر عنه بالنطق البدائي: أنا أكون. أي شي آخر هو إما أجزاء صلبة أو برامج، وبالإمكان تغييره أو الاستغناء عنه. «أنا أكون» هي الفكرة الوحيدة التي تربطني بالشخص الذي كنتُه منذ عشرين عاماً.

الأمر العجيب أنه عليك التعبير عن وعيك الفردي بالكلمات ذاتها التي أستخدمها أنا للتعبير عن وعيي الفردي: «أنا أكون»، «أنا نفسي»،

36- يمكن العثور على التمثيل المقنِع لهذه الفكرة في: John Varley, *The Ophiuchi Hotline* (New York: Dell, 1978). يتم تسجيل أنماط دماغ البطلة ونقلها إلى جسد جديد مستنسخ عن جسدها القديم. وفق الخيال العلمي، توجد طرق مختلفة لنقل المادة. وفي هذه القصة، يتمّ استخراج وصف دقيق لجسم الشخص (ويُدمَّر الجسم في هذه العملية)، ثم يتمّ ترميزه، ثم إرساله عبر حزمة من الأمواج الضوئية أو أمواج الراديو. بعد ذلك يتم فك ترميزه لبناء جسم جديد مماثل. انظر: Robert Weingard, «On Travelling Backward in Time», *Synthese* 24 (1972), pp. 117-132.

«أنا موجود». تأثر الفيلسوف هيغل كثيراً بهذه الحقيقة، واعتبرها نموذجاً لـ «الطبيعة الإلهية للغة».

ما الاستنتاج الذي يمكننا أن نصل إليه من حقيقة أن وعيك الأساس ووعيي الأساس يُعبَّر عنهما بالكلمات ذاتها؟ ربما من المعقول أن نفترض أن هناك وعياً واحداً حقاً، وأن الأفراد هم ببساطة وجوه مختلفة لما يسميه التقليد الصوفي الكلاسيكي «الواحد».

لكن يمكننا أن نذهب أبعد من ذلك. إن جوهر الوعي، في الحقيقة، ليس أكثر من الوجود البسيط. «أنا أكون». لِمَ ننكر امتلاك هذا الوعي لأي شيء آخر موجود غيرنا؟ قال الأكويني إن الإله هو وجود نقي غير معدَّل. أليس من الواضح أن هناك شيئاً مفرداً معيناً -ربما الإله أو الواحد أو الوجود الخالص- يتخلل العالَم كله؟ تقول إحدى عبارات الزن، «يبلّل المطر الكوني جميع المخلوقات»[37]. أو يمكن أن نفكر في العالَم كنافذة من الزجاج الملون التي يمرّ شعاع الضوء في كل جزء منها.

أن توجد يعني أن تكون واعياً. أما الأشياء الأخرى التي قد يشعر المرء أنها ضرورية للوعي فهي أنواع معقدة من الأجزاء الصلبة والبرامج؛ أنماط من المادة والطاقة. لكن ما من شيء قد يوعى إلى أن يوجد، وبذلك يُجلب إلى الواقع. الوجود، أخيراً، هو الأمر الوحيد المطلوب للوعي. الصخرة واعية. هذه الورقة واعية. وهكذا، الروبوت واعٍ، قبل وبعد أن يتطور سلوكه ليصل إلى مستوانا.

عموماً، كان أولئك الذين أكدوا التكافؤ بين البشر والآلات (المُحتمَلة) أشخاصاً إيجابيين وميكانيكيين وماديين. وصاغوا وجهة نظرهم بقولهم «ليس البشر أفضل من الآلات». لكن إذا غيّرنا التوكيد فحسب في هذه العبارة، يصبح التكافؤ تعبيراً عن إيمان عميق بعالمية وواقعية الوعي: «يمكن للآلات أن تكون واعية كالبشر!».

37- D. T. Suzuki, *The Field of Zen* (New York: Harper & Row, 1970), p. 37.
ويقول المقطع: «السؤال: قيل لي إن حقيقة واحدة تبلّل كل الكائنات. ما هي الحقيقة؟» الجواب: إنها تمطر».

ما بعد الآلية

هناك ثلاث وجهات نظر لموضوع أرواح البشر والروبوتات.

1. الآلية: ليس البشر ولا الروبوتات سوى آلات، وما من سبب يمنع وجود آلات شبيهة بالبشر.
2. الإنسانية: للبشر أرواح لا يمكن للروبوتات أن تملكها، لذا لا يمكن لأي روبوت أن يشبه البشر.
3. الصوفية: كل شيء، سواء البشر أو الروبوتات، شركاء في **المطلق**، لذا يمكن أن توجد آلة شبيهة بالبشر.

ربما ليست «الصوفية» اسماً جيداً لوجهة النظر الأخيرة، لكن سنستخدمه الآن على أي حال.

ناقشت في القسم الأخير وجهة النظر الثالثة، التي تُظهِر أن مفهوم «امتلاك الروح» أمر تلقائي لأي شيء موجود. لكن بما أن ذلك يؤدي إلى استنتاج مماثل لاستنتاج وجهة النظر الآلية، فقد يشعر القارئ أني تهربت من القضية الحقيقية. نحن نميل للاعتقاد بأن الإنسان «أكثر من مجرد آلة». لكن هل من مبرر محتمَل لهذا الاعتقاد بدون اللجوء إلى **المطلق** الذي يتخلّل كل شيء؟

طور آلان تورنغ في ورقتين بحثيتين كلاسيكيتين حجة قوية لوجهة نظر الآلية: كل ما يمكننا معرفته عن عقل شخص آخر يعتمد على مراقبة سلوكه، أي من خلال التحدث معه وقراءة كتاباته وما إلى ذلك. ويبدو نظرياً أنه لا يوجد مانع لوجود آلة تكون «محادثتها» تماماً مثل محادثة أي شخص[38].

38– انظر: ,«On Computable Numbers, with an Application to the *Entschiedungsproblem*»
وأعيدت طباعته في: M. Davis, ed., *The Undecidable* (Hewlett, N.Y.:

يمكن الاعتراض على مثل هذه الحجة بأنها لا تأخذ في الاعتبار الظواهر العقلية الخاصة، كالصور الذهنية والغايات والعواطف. لكن الإجابة على هذا الاعتراض تقول إن ما نسميه صورة ذهنية هو مجرد نموذج أو محاكاة يمكن لجهاز الحاسوب استخدامها، وغايتها ببساطة تعيين قيم المنفعة لحالات داخلية معينة، أما العواطف فهي مجرد طرق تعيين قيم الظواهر الخارجية.

كما يمكن صياغة حجة أقوى للآلية من خلال التأكيد على أن أنشطة العقل تتطابق مع عمليات كهربائية كيميائية معينة في الدماغ، وأن العمل الأساس للدماغ مشابه لعمل الحاسوب الرقمي[39].

وبعبارة أخرى، لا وجود منفصل عن العقل بمعزل عن المادة، والدماغ محدود. وتؤكد هذه الحجة أن العملية العقلية هي عملية محدّدة ومقيدة، لذا بإمكاننا تصميم عملية مشابهة بواسطة حاسوب رقمي ضخم بما فيه الكفاية.

يشكك المؤمنون بالتخاطر والاستبصار والظواهر فوق الطبيعية في صحة الافتراض القائل بعدم وجود العقل بمعزل عن المادة. ويشير الكثير من الباحثين من أنصار هذا الرأي إلى حوادث وتصورات غير معتادة لا تتناسب مع فكرة أن العقل مجرد ظاهرة تحدث ضمن حدود الجمجمة. وإني شخصياً لا أعرف كيف أرد على هذا الرأي؛ فأنا اختبرت نصيبي مما يسمِّيه كارل يونغ «التزامن»، من مصادفات تحمل معنى ما، وأحاسيس

Raven Press, 1965), pp. 116-151. مع انتباه خاص للصفحات 135–138.
انظر أيضاً: «Computing Machinery and Intelligence». أعيدت طباعته في: Anderson's *Minds and Machines*. تحتوي مختارات ديفيس على ترجمة لمقالة غودل الأصلية حول نظرية عدم الاكتمال، بالإضافة إلى العديد من الأوراق المهمة الأخرى. وفي: Douglas Hofstadter, «Metamagical Themas», *Scientific American* (May, 1981). يصوِّر هوفستادتر لعبة المحاكاة من خلال محادثة بين ثلاثة أفراد، قد يكون أي منهم ذكراً أو أنثى أو روبوت. وعلى القارئ أن يخمِّن!

39- هذه الصيغة مأخوذة من: *From Philosophy to Mathematics*, p. 326. يفيد وانغ في هذا الفقرة أن غودل رفض التأكيد الأول باعتباره «إجحافاً لعصرنا، والذي سيتم دحضه علمياً (ربما بسبب عدم وجود خلايا عصبية كافية لأداء العمليات القابلة للإدراك في العقل)».

مسبقة صادقة، وتوقعات صائبة(40). لكن الرغبة قوية جداً في الوصول إلى أجوبة، والاحتمالات كبيرة جداً للوقوع في ضلال، لذا من الضروري أن نلتزم أقصى درجات الحذر.

يفتقر الرأي السابق إلى نظرية معقولة لكيفية تجاوز العقل لحدود الدماغ(41). وكما اقترحت في نهاية الفصل الثاني، من الجيد أن تصُحَّ نظرية كانتور، فعندها يمكن أن نعتبر العقل أو «الجسم الأثيري» مكوَّناً من مادة عالية المستوى ومختلفة تماماً عن المادة التي نعرفها. لكن لا يوجد دليل لمثل هذه النظرية، وما زالت مجرد فكرة عن فكرة.

قد تؤدي التطورات الحديثة في الفيزياء إلى ظهور حجة تجريبية على عدم المساواة بين البشر والآلات(42). تشير التجارب إلى استمرار تأثير الجُسيمات على بعضها البعض بعد حدوث التفاعل بينها بفترة طويلة. إذا صحَّ ذلك، فإن الكون يتصرف ككلٍّ عضوي واحد، مما يعني وجود إمكانية تعريف العقل على أنه كوني بدلاً منه فردي. لكن، كما أشرت في القسم الأخير، ما من سبب يمنع وجود وعي ذي مستوى أعلى يتصل بالروبوتات أيضاً. وحينها بالطبع لن تكون الروبوتات مجرد «آلات» بالمعنى المحدود والنهائي الذي تقصده وجهة النظر الآلية.

بالعودة إلى حجة الآلية، ماذا عن الافتراض 2؟ كما ناقشنا في قسم «اللانهاية في الصِّغَر»، المادة قابلة للقسمة إلى ما لانهاية. يعني ذلك أن أي شيء مادي، مثل دماغ الإنسان، سيكون قابلاً للقسمة إلى ما لانهاية. ربما

40- C. G. Jung, *Synchronicity* (Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1973). انظر أيضاً: *The I Ching* (Richard Wilhelm and Cary Baynes, trans., Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1967), pp. xxi-xxxix.

41- انظر بحث: E. Wigner, Remarks on the Mind-Body Question, I. J. Good, ed., *The Scientist Speculates* (New York: Basic Books, 1962), pp. 284-302. وانظر أيضاً: A. Puharich, ed., *The Iceland Papers* (Amherst, Wisconsin: Essentia Research Associates, 1979).

42- Bernard d'Espagnat, «The Quantum Theory and Reality», *Scientific American* (November, 1979), pp. 158-181.

كانت أفكارنا لانهائية بالفعل، أصدق ذلك في بعض الأحيان، مع تذكري لملاحظة كانتور «اللانهاية تسكن عقولنا»[43].

نقرأ في «آليس في بلاد العجائب»:

- «لا أستطيع أن أصدق ذلك!» قالت آليس.

- «لا تستطيعين؟» قالت الملكة بلهجة تحمل الشفقة. «حاولي مجدداً: خذي نفساً عميقاً، وأغلقي عينيك».

ضحكت آليس وقالت: «لا فائدة من المحاولة، لا يستطيع المرء تصديق المستحيل».

أجابت الملكة: «أثق بأنك لم تتدربي على ذلك كثيراً. عندما كنت في عمرك، تدربت كل يوم لمدة نصف ساعة على تصديق المستحيل. أحياناً، قبل تناول الإفطار، أفكر في ستة أشياء مستحيلة وأصدقها»[44].

ربما يكون أصحاب وجهة النظر الآلية على حق. لكن يجدر بنا بالتأكيد أن نبقي أذهاننا مفتوحة الآفاق، حتى لو عنى ذلك أحياناً أن نصدق أشياء «مستحيلة».

43- Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 374.

44- Lewis Carroll, *Through the Looking Glass*, Chapter V (New York: Random House, 1946), p. 76.

ألغاز ومفارقات الفصل الرابع

1. لتكن الجملة S: «لا يمكن إثبات هذه الجملة». إذا أثبتنا أن S جملة ذات معنى، أي «لا يمكن إثباتها»، فهي إذاً صحيحة. لكن هذا يعني أن S يمكن إثباتها! كيف يمكن حل هذه المفارقة؟[45].

2. ناقش الحجة التالية لعدم واقعية الموت:

يكافئ عقل الشخص وشخصيته برنامجاً حاسوبياً. يمكن ترميز أي برنامج حاسوبي بواسطة مجموعة كبيرة من الأعداد الطبيعية. توجد كل مجموعة من الأعداد إلى الأبد كتجريد رياضي مستقل عن الكون الفيزيائي. لذلك، عقل الشخص وشخصيته خالدان.

لِمَ لا يبدو ذلك مقنِعاً؟

3. ناقش الآن هذه الحجة الأقوى لخلود الفنان:

يُرمَّز جزء كبير من أفكار الفنان ومشاعره الشخصية -برنامجه- في عمل فني رائع له. عندما يغوص أحدهم في عمل فني ما، فإنه «يرتدي» -لبضع لحظات- البرنامج الفعلي (عقل الفنان) الذي تمّ ترميزه في هذا العمل. في كل مرة يقدِّر فيها شخص آخر عمل فنان، فإنه في هذه اللحظات يطابق الفنان نفسه، وبالتالي يُجسَّد الفنان عبر أشخاص آخرين -للحظات- مراراً وتكراراً. إذا جسَّدك شخص آخر للحظات بعد مئة عام

45- هذا المثال من: Raymond Smullyan, *What Is the Name of This Book*? (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1978), p. 240. ربما يشكل هذا الكتاب أكبر مجموعة من الألغاز المنطقية. وتظهر شخصية مؤلفه الغريبة والمميزة، رايموند سموليان، في الطريقة الممتعة لعرض الألغاز.

من الآن، هل سيؤثر ذلك عليك؟ وهل سيختلف الأمر عن تجميدك لمئة عام ثم إعادة إنعاشك؟

4. تأمل المثال الخيالي التالي (وهو فكرة الباحث الأمريكي دوغلاس هوفشتادتر). «تخيل صندوقاً موسيقياً يعمل بإدخال عملات نقدية فيه. وإذا ضغطت على الزر 11، ستنطلق أغنية تقول: ضع عملة أخرى واضغط الزر 11». سيعمل هذا الصندوق مراراً وتكراراً إلى الأبد. هل يمكنك تحديد الحالة والنظام الكامل لذلك؟

5. هناك لعبة كلمات تُسمَّى أحياناً «غولف الكلمات» تشبه على نحو بسيط نظاماً شكلياً. يبدأ المرء بكلمة معينة، «Love» مثلاً، تشكِّل «البديهة» الأولية. وتتمثل «قاعدة الاستدلال» باستبدال حرف واحد من الكلمة في كل خطوة بشرط أن تنتج كلمة إنكليزية جديدة. تمثِّل الكلمات الجديدة «القضايا» التي تنتج من هذا النظام خلال سلسلة من التحولات بدءاً من «البديهة» الأولى وفقاً لـ«قاعدة الاستدلال». على سبيل المثال، «Hate» هي قضية (أو نتيجة) لـ«Love». و«البرهان» على ذلك هو التسلسل: Love، Rove، Rave، Have، Hate. والسبب في تسميتها «غولف الكلمات» هو أن المرء يحاول العثور على «البراهين» بأقصر طريق ممكن. وإذا قبلنا الكلمة الغامضة Lave، سيصبح الاشتقاق أقصر بخطوة من السابق: Love، Lave، Late، Hate. والآن، كم عدد الخطوات التي تحتاجها لتحويل كل مما يلي: Cold إلى Warm، Beer إلى Wine، Fish إلى Fowl؟

6. تحدثنا في هذا الفصل عن آلة الحقيقة العالمية التي يمكنها أن تطبع كل الجمل الصحيحة الممكنة. وناقشنا في القسم «ما هي الحقيقة؟» نوعاً من آلات تصنيف الحقائق، والتي يمكنها بمجرد النظر إلى الكتاب أن تعطي جواباً بأن الكتاب صحيح أم خاطئ. وأثبتنا أن أياً من هاتين الآلتين لا يمكن أن توجد. لكن، إذا تجاهلنا هذا الإثبات، كيف نبرهن أنه يمكن تحويل آلة الحقيقة العالمية إلى آلة تصنيف للحقائق، والعكس صحيح؟

7. إن أجهزة الحاسوب اليوم متفوقة بأشواط بعيدة عن أجهزة الحاسوب منذ ثلاثين سنة، بالنسبة لكل من أجزائها الصلبة وبرامجها. أثبت أن هذا

التحسن يمثِّل تطوراً للروبوتات، وأشِر إلى العمليات التي يمكن أن نعتبرها مكافئة للتكاثر، والانتقاء، والطفرات.

8. يشير الاقتباس المذكور في بداية القسم «نحو وعي الروبوت» أنه «إما أن يتجاوز العقل البشري كل الآلات (بدقة أكبر، يمكنه أن يجيب على أسئلة نظرية أكثر من أي آلة)، أو أنه يوجد عدد غير نهائي من الأسئلة النظرية غير القابلة للإجابة من قِبَل العقل البشري»[46] اشرح كيف يمثِّل ذلك مجرد إعادة صياغة للنتيجة التي تقول إنه لا يمكن لأي آلة الإجابة على كل الأسئلة النظرية.

أجوبة ألغاز الفصل الرابع

1. كما يشير رايموند سموليان، تنتج هذه المفارقة لأن عبارة «قابل للإثبات» غير قابلة للتحديد بأي معنى مطلق ومنتهٍ. وفي هذا المنحى، فإن هذه المفارقة تشبه كثيراً مفارقة الكاذب، والتي يتمّ تجنبها بأن «الحقيقة» غير قابلة للتحديد. إن المفهوم الدقيق والوحيد لعبارة «قابل للإثبات» هو إكمالها بـ «من خلال النظرية T»، وT هو نظام شكلي محدّد ومنته. وبذلك ينتفي وجود مفارقة في العبارة «لا يمكن إثبات هذه الجملة من خلال النظرية T»، لأنها لن تُعرَّف ضمن T، ويمكن تعريفها خارج T، نظراً لافتراضنا الإضافي بأن T نظام ثابت.

2. هذا سؤال صعب. ناقشه دوغلاس هوفشتادتر في قسم «حوار مع أينشتاين» من كتابه مع دانيال دينيت «عقل الأنا»[47]، والذي يضمّ بالمناسبة العديد من النقاشات حول فكرة هذا السؤال.

46- انظر الهامش (26) لمصدر هذا الاقتباس. ينشأ الغموض في ملاحظة غودل هذه بسبب عدم وضوح عبارة «العقل البشري». إذا اعتبرنا أنه يعني العقل الجمعي لكل البشر الذين سيوجدون، فمن المناسب ألا يكون لهذا «العقل» وصف منته، خاصة إذا كان هناك عدد لانهائي من الأجيال البشرية، والذين يمتلك كل فرد منهم عقلاً يختبر طفرات عشوائية. كما يمكن القول إن أي عقل منفرد يمكن أن يصبح معقداً على نحو لا يوصف، من خلال دمج التغييرات العشوائية التي تحدث فيه.

47- *The Mind's I* by Douglas Hofstadter and Daniel Dennett.

تكمن المشكلة في أن المرء يميل للاعتقاد بأن النفس شيء يتجاوز المادة والعواطف الخاصة. ومع ذلك، إذا كانت النفس، كما ناقشت سابقاً، ليست أكثر من وجود صافٍ، فالمرء عندئذ خالد، لأن الوجود الصافي يستمر مستقلاً عن موت الأفراد.

يوجد اعتراض آخر على فكرة الخلود كنمط مشابه للبرامج الحاسوبية، وهو أن الإنسان الحي يتغير مع مرور الوقت، لكن المحاكاة المُرمَّزة تبدو ثابتة لا تتغير. ويمكن أن نجيب كما يلي. أولاً، من حيث المبدأ، يمكن تخيل محاكاة مُرمَّزة لإنسان تستمر بالتغير والتفاعل مع محاكاة للعالم. ثانياً، هذا النمط الذي نناقش وجوده هو نمط يعتمد على الزمن، وبالتالي هو في الواقع كائن ثابت في الزمكان الرباعي الأبعاد. ويمكن لهذا النمط أن يُرمَّز كمجموعة؛ وبالتالي لن تكون المحاكاة موجودة في كون نظرية المجموعة فحسب، بل سيوجد هناك أيضاً ترميز لجميع احتمالات استمرار حياة المرء، حتى الاحتمال باستمرار الحياة إلى الأبد.

3. ما لم نعتقد أن الروح مكوِّن مادي فعلي من مكونات الجسد (حاول البعض أن يحدّدوا وزن الروح عن طريق وضع أشخاص محتضرين على ميزان دقيق، وإيجاد الفرق بين وزن الشخص قبل الموت وبعده)، فعندها يبدو أن نسخة طبق الأصل منك قد بُعثت بعد مئة عام. ليست الاستمرارية المادية للجسد مهمة بالفعل في ضوء حقيقة أن جميع خلايا الجسم تتبدل كل عشر سنوات تقريباً. لكن السؤال الأول المطروح ليس عن نسخة طبق الأصل منك، بل عن نسخة طبق الأصل من حالة ذهنية معينة. هل يختلف الأمر؟

من المريح بالتأكيد الاعتقاد بخلود فني من هذا النوع. والحقيقة أنه أحد النوعين الوحيدين للخلود المادي الذي يمكننا التأكد منه، والنوع الثاني هو الخلود الجيني، بمعنى أن يكون الإنسان خالداً في أحفاده وأحفادهم. في كلتا الحالتين لا يوجد بالطبع شبح من نفسك يتحرك ويفكر «أنا أكون»، لكن إذا كانت كل «أنا أكون» ينطقها أحد ما هي ذاتها، فما الفرق؟

أضيف هنا، على سبيل شرح هذا الفكرة، أنني كتبت هذا الأسئلة بعد فترة

قصيرة من مقتل جون لينون، المغني وناشط السلام المشهور. كنت جالساً أستمع إلى إحدى أغانيه وأغني الكلمات بطريقة مشابهة له، وللحظة خطر لي أنني كنت جون لينون، مثل أي شخص آخر استمع إلى موسيقاه وشعر بها بذلك الزخم العاطفي. ذُكرت الفكرة ذاتها في إحدى روايات توماس بينشون[48]. ومن منا لم يشعر بعد مشاهدته فيلمه المفضل أنه -للحظات- البطل ذاته فعلاً؟

4. الحالة التي تتكرر هي تشغيل الأغنية. مع ذلك، لا يمكن تسمية هذه الحالة بحدِّ ذاتها بأنها تكاثر ذاتي: إنها حالة طفيلية على سلوك شخص ما. ربما يمكننا أن نقارن الأغنية بفيروس يتكاثر عن طريق الاستيلاء على المادة الجينية للخلية لتحويلها إلى «مصنع للفيروسات»، إلا أن الاستماع إلى أغنية لا يتسبّب بهلاك الشخص بالطبع. أما النظام الكامل الذي لدينا في هذه الحالة هو الأغنية إضافة إلى المستمِع.

يشير هذا المثال إلى فكرة أخرى: إن الأفكار هي أنماط «حية» مستقلة تخلِّد ذاتها من خلال التفكير بها. ويمكن أن ننظر إلى مفارقة زينون، على سبيل المثال، على أنها نوع من طفيليات العقل التي يُصاب بها المرء.

5. وجدت ثلاثة حلول أذكرها فيما يلي. يمكن الإختصار قليلاً من الحلين الأخيرين.

COLD, CORD, CARD, WARD, WARM.

BEER, BEAR, BEAD, BEND WEND, WIND, WINE.

FISH, DISH, DASH, BASH, BASS, BOSS, BOWS, BOWL, FOWL.

6. لتكن U آلة الحقيقة العالمية. ونريد أن نستخدم U كمكوِّن في آلة تصنيف الحقائق T_U. نضع U داخل صندوق كبير، وستطبع الآلة جملاً

48- *Gravity's Rainbow* by Thomas Pynchon. (المترجمة).

صحيحة، والتي سيكون طول بعضها بطول كتاب. وعند إدخال أي كتاب في الصندوق، سيلتقطه روبوت ويقوم بمقارنته مع الكتب التي تطبعها الآلة U. إذا كانت U آلة الحقيقة العالمية فعلاً، ستظهر الإجابة إما أن الكتاب صحيح أو خاطئ. وبمجرد ظهور النتيجة يضع الروبوت الكتاب إما في نافذة الكتب الصحيحة أو نافذة الكتب غير الصحيحة. وبذلك تكون المجموعة (الآلة U والصندوق والروبوت) آلة تصنيف الحقائق T_U.

والآن لنقم بعملية معاكسة. لدينا آلة تصنيف الحقائق T، ونريد أن نستخدمها كمكوِّن في آلة الحقيقة العالمية U_T. نضع T داخل صندوق كبير، ونضع بجانبها آلة تطبع ميكانيكياً كل الكتب الممكنة، كتاباً تلو الآخر. تقرر T لكل كتاب يُطبع إن كان صحيحاً أم لا. تُخرج الكتب الصحيحة من الصندوق وتُنشر. وبذلك تكون المجموعة (الآلة T والصندوق والطابعة) آلة حقيقة عالمية U_T.

نلاحظ هنا أننا إذا اعتبرنا الهدف هو «قابلية الإثبات بالنسبة لنظام شكلي محدد» بدلاً من «الحقيقة»، فلن تبقى المساواة محققة. ولتوضيح السبب نفرض أن *UPM* آلة تدرج كل قضايا النظام *P*، و*PSM* آلة تقرر إن كانت أي عبارة تُعطى لها قضية من *P* أم لا، عندها ستكون *PSM* أقوى على نحو أساس من *UPM*. لأن من الممكن أن *UPM* لا تدرج أبداً قضية ما ولكنها قد تدرج في الوقت ذاته نفيها، وبمراقبتنا إياها لن نصل أبداً إلى جواب للسؤال «هل هذه القضية من النظام؟». يُعبَّر عن هذه الحقيقة بلغة تقنية بالقول إن مجموعة قضايا هذا النظام «معدودة على نحو متكرر» (بمعنى قابلة للوضع في قائمة ميكانيكياً)، لكنها ليست «عودية» (بمعنى أن انتماءها للمجموعة قابل للإقرار ميكانيكياً).

7. تتكاثر أجهزة الحاسوب بمساعدة الإنسان. حتى إذا ظهر برنامج ما عشوائياً، فيمكننا طباعته ونقله إلى جهاز آخر. وأساس الانتقاء بسيط: نحن ننتقي الأجزاء المادية والبرامج التي تعمل بدقة وسرعة أكبر. أما الطفرات فتحدث في المقام الأول بمساعدة الإنسان. فقد يعمل برنامج ما على نحو

جيد إلى حدٍّ ما، ثم يأتي أحدهم ويبتكر طريقة تحسِّن الخوارزمية وتزيد من فعاليتها. إن وجهة النظر «تطور أجهزة الحاسوب» سائدة لدرجة أن من الشائع أن يتحدث الناس عن «أجيال» منها. ومن المثير للاهتمام أن نلاحظ أن البرامج اليوم وصلت لدرجة شديدة من التعقيد، حتى يتعذَّر على أي فرد استيعابها بالكامل. تمّ تجميع العديد من البرامج الضخمة تدريجياً من قبل العديد من الأشخاص، مثل البرنامج المسؤول عن إطلاق مكوك الفضاء. ومثل هذه البرامج كبيرة جداً لدرجة يُشك فيها أن يتمكن شخص واحد من معرفة البرنامج بأكمله. ومع ذلك، ما يزال غير الفهم هذا ناتجاً عن الحجم الهائل وتكاثر الحالات الخاصة، لا من التعقيد الفعلي للبرنامج.

8. نبدأ بالقول، إما أن العقل البشري قادر على حلّ أسئلة أكثر من أي آلة، أو أن هناك آلة معينة لا يستطيع العقل البشري تجاوزها. ينقسم البديل الثاني إلى حالتين: الأولى أن هذه الآلة تعادل العقل البشري، والثانية أن الآلة قادرة على حلّ مسائل أكثر من العقل البشري. يُعتبر إثبات الحالة الأولى سؤالاً من نظرية الأعداد غير قابل للحل. ويمكن في الحالة الثانية أن نأخذ أياً من أسئلة نظرية الأعداد التي لا يمكن للبشر حلها حتى الآن، ونطرحها على الآلة. وبذلك نكون قد أثبتنا افتراض غودل.

من الصعب تحديد المعنى الذي تحمله عبارة غودل في الحقيقة. تكمن المشكلة في أن «العقل البشري» ليس مفهوماً محدداً؛ فهل نعني به عقل الشخص العادي؟ أم عقل غودل؟ أم العقول الجمعية لكل إنسان وُجد يوماً على الأرض؟ أم العقول الجمعية للناس جميعاً في أي زمن؟

لنفترض أن الجنس البشري لن يموت أبداً، وأن المعرفة الرياضية البشرية هي مجموع كل الحقائق الرياضية التي ستُعرف يوماً ما. إذا دعونا هذه المجموع المعرفي H، عندها يكون H هو النهاية التي تسعى إليها المتتالية المتزايدة من المجموعات H_1، H_2، ...، H_n. ربما كان H لانهائياً: ليس لانهائياً بيانياً فحسب، بل لانهائياً بمعنى عدم وجود وصف منته له. في هذه الحالة، يمكننا القول إن البديل الأول لغودل صحيح. قد يعترض أحد ما قائلاً

إنه بالنسبة للقيم الكبيرة جداً لـ n، سيكون H_n في الواقع أكبر من أن يعرفه أي أحد. لكن هذه المعرفة قابلة للتوزيع على عدد كبير جداً من الناس. ويمكننا التفكير كنوع من الخيال العلمي بأجهزة حاسوب ضخمة تُستخدم كأدمغة صناعية. ذكرت فكرة مشابهة لذلك في روايتي «Spacetime Donuts»، حيث يقوم بعض المفكرين في المستقبل بتوسيع قدراتهم العقلية عن طريق توصيل أدمغتهم إلى جهاز حاسوب عملاق.

إذا كان مجموع المعرفة الكلية للبشر لانهائياً بالفعل، أي إن H لانهائي، فهل سيجعل ذلك البشر أفضل من الآلات؟ لا، لن يحدث ذلك. لأن بإمكاننا أن نتخيل أن الروبوتات، جيلاً بعد جيل، ستصبح أكثر ذكاءً وتتطور لتنتج سلسلة من مستويات المعرفة الرياضية للروبوت: R_1، R_2، ...، R_n، والتي تسعى إلى نهاية هي R، المعرفة اللانهائية. إن المعرفة الرياضية الكلية للبشرية أكبر من معرفة أي آلة، ولكنها ليست بالضرورة أكبر من المجموع المعرفي الكلي لجميع آلات المعرفة.

الفصل الخامس

الواحد والكثرة

إذا طلبت منك أن تفكر في كل شيء، الكون الفيزيائي كله منذ البداية وحتى الآن، كل الأكوان المحتمَلة، كل الأفكار المحتمَلة، كل المجموعات الرياضية، هل يمكن للفرد أن يفكر في كل ذلك؟ إن المسألة الكلاسيكية حول الواحد والكثرة تقول: هل يمكن اعتبار كل شيء موحَّداً كشيء واحد؟ وهل العالَم واحد أم كثرة؟

يشرح القسم الأول باختصار بعضاً من جوانب المسألة الكلاسيكية للواحد والكثرة. ولأنه يمكن شرح هذه المسألة من خلال نظرية المجموعة، لذا يقدِّم القسم الثاني، «ما المجموعة؟»، الفكرة العامة لذلك. بينما يصف القسم «كون نظرية المجموعة» الطرق المتعددة التي تظهر فيها المسألة في النظرية. ويصف القسم الأخير «بداية التنوير» نوعاً من الحلّ الماورائي، وهو حلّ نصل إليه من خلال النظر إلى المشكلة من مستوى أعلى. لا تكون مثل هذه الحلول مرضية دائماً، مثل أن يكون الحلّ لمسألة في الشطرنج هو قلب اللوحة!

المسألة الكلاسيكية للواحد والكثرة [1]

يوجد شكلان لمسألة الواحد والكثرة:

1) كم عدد أنواع الأشياء الموجودة؟

2) كم عدد الأشياء الموجودة؟

والإجابة الأولى لهذين السؤالين أن هناك أنواعاً عديدة من الأشياء، وهناك أشياء عديدة.

مع ذلك، نجد رغبة دائمة في اختزال الظواهر العديدة في العالَم وإرجاعها إلى نوع أساس واحد، وفي الاعتقاد بأن كل الأشياء في نهاية الأمر مبنية من الشيء ذاته. تعدّدت الاقتراحات لهذا الشيء الجوهري، فهناك اقتراحات بأن يكون المادة، أو الشعور، أو الفكر، أو الشكل. يُسمَّى هذا الاعتقاد بأن هناك نوعاً واحداً فحسب من الأشياء بـ «الوحدوية». المادية والمثالية كلاهما وحدويان. سنناقش الوحدوية، وتأكيدها أن كل شيء هو مجموعة، في قسم «كون نظرية المجموعة»[2].

1- يظهر هذا القسم الفرعي في بحثي: «The One /Many Problem in the Foundations of Set Theory», in *Logic Colloquium 76* (Amsterdam: North-Holland, 1977). في مؤتمر عُقد في أوكسفورد في إنكلترا. أشكر دانا سكوت على دعوتي. تعلمت التمييز بين أحادية النوع وأحادية المادة من: Roland Hall's essay, «Monism and Pluralism», in the *Encyclopedia of Philosophy*.

2- على الرغم من أن كانتور نفسه يلمّح إلى العلاقة بين نظرية المجموعة ومشكلة الواحد والكثرة بالإشارة إلى أفلاطون في الصفحة 204 من كتابه *Gesammelte Abhandlungen*، إلا أن الفيلسوف جوشوا رويس كان أول من أوضح هذه العلاقة، والمرجع هو «The One, the Many and the Infinite»، والذي ظهر كملحق

تبدأ الوحدوية من التأكيد على أن «الكل واحد»، وبذلك توجد الأشياء من الأعلى إلى الأسفل بدلاً من الأسفل إلى الأعلى. وتؤكد أن كل شيء هو جزء أو مظهر لوحدة أعلى تُدعى عادة **المطلق**.

يؤدي استخدام كلمة أو مفهوم «كل شيء» إلى توحيد العالم ظاهرياً في واحد. وبالطريقة ذاتها، يؤدي مفهوم «المجموعة» إلى توحيد كون المجموعة في واحد، لكن بدون الإجابة على السؤال الحقيقي إذا كان هذا الكون بأي شكل من الأشكال كائناً مكتملاً محدداً. وجوهر السؤال الثاني هو ما إذا كان العالم موحداً بمعنى عضوي، أكثر منه مجرد تلاعب بالألفاظ.

ربما كان سبب الاعتقاد بأن العالم واحد عضوياً هو نوع من البصيرة الغامضة بأن «مسرَّة الحب» تشير إلى «الوحدوية أو وحدة الطرق»[3]. مع ذلك، ليس الشعور بوحدة العالم أمراً حاسماً، بسبب وجود شعور بتنوع العالم أيضاً.

يمكن لنا أن نناقش أحادية الجوهر بطرق مختلفة. إحدى هذه الطرق، أن كل شيء في هذا العالم مرتبط بكل شيء آخر، وأن **المطلق** هو الوسيلة أو الجوهر لهذا الارتباط. يقوم **المطلق** هنا بدور النسيج الضامّ الذي يثبت أفراد العالم في الهيكل العلائقي المُدرَك.

تقول طريقة ثانية إن أي شيئين هما في الحقيقة الشيء نفسه؛ وإن **المطلق** هو الموجود الوحيد الذي يتنوع على نحو لانهائي.

لكن من المشكوك فيه وجود مثل هذا **المطلق**، ولا تزال تعددية الجوهر موقفاً معقولاً. نجد هذا الموقف في كتاب وليم جيمس «الكون المتعدد»:

«... أفضِّل تبنِّي وجهة النظر التعددية التي تجعلنا على استعداد للاعتقاد بألا يوجد في نهاية المطاف أي شكل كامل على الإطلاق، وأن جوهر الواقع

لعمله *The World and the Individual, First Series*. والفكرة الأساسية لهذه المقالة الصعبة هي أن المجموعة اللانهائية تمثِّل نموذجاً جيداً للمطلق باعتبارها واحداً وكثرة في الوقت نفسه. وتمّت مناقشة فكرة «النظام الذاتي التمثيل» في قسم «Infinities in the Mindscape» من مقالة رويس.

3– Arthur Lovejoy, *The Great Chain of Being* (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1953), p. 12.

قد لا يقبل الجمع في شيء واحد مطلقاً، بل يبقى خارج أكبر مجموعة يمكننا صنعها. وإن الشكل المتنوع للواقع، كل شكل، مقبول منطقياً وتجريبياً كاحتمال كما الشكل الكامل الذي يُقبل على نحو شائع كأمر بديهي واضح»[4].

لن أبقي القارئ في حالة من التشويق، وسأعلن موقفي من مسألة الواحد والكثرة. لكن ليس الأمر بهذه البساطة. إني أتفق مع جيمس في حقيقة أن لا وجود لكون واحد نهائي. لكن من ناحية أخرى، أرى أن التعبير البسيط: «يوجد»، يربط كل شيء معاً في وحدة يمكننا نظرياً إدراكها مباشرة. عقلانياً، الكون كثرة، لكنه واحد على نحو غامض. والسؤال الذي يهمني حقاً هو: كيف نوفّق بين **المطلق** الواحد و**المطلق** الكثرة؟ كيف نلائم بين عالم الشعور وعالم الفكر؟

لكن لا ينبغي للقارئ أن يأمل في أي إجابة نهائية وحاسمة لهذا الجانب من المشكلة، التي يجادل فيها الإنسان منذ زمن بارميندس والسفسطائيين. نجد في القسم 15 من فيليبوس، حوار أفلاطون الأخير، رأي سقراط الساخر والكئيب والحكيم في مشكلة الواحد والكثرة:

«نقول إن مشكلة الواحد والكثرة تُعرَّف بالفكر، وإنهما في كل لحظة، يجريان معاً، يدخلان ويخرجان في كل كلمة منطوقة، وإن هذا الاتحاد لا يتوقف أبداً. ولم يبدأ هذا الاتحاد الآن، لكني أعتقد أنه نوع أبدي من الفكر نفسه، الذي لا يشيخ أبداً. إن أي شاب يتذوق هذه الخفايا لأول مرة، سيُسعد ويتوهم أنه وجد كنزاً من الحكمة؛ وفي غمرة حماسه الأول لن يترك حجراً،

4- William James, *A Pluralistic Universe* (New York: Longmans, Green & Co., 1909), p. 34. كان لدى ويليام جيمس صديق يدعى بنجامين بول بلود، والذي كان أول صوفي كيميائي في أمريكا. وكان يعتمد على مادة التخدير، الإيثر، في أبحاثه. جذب بلود انتباه جيمس بكتيب عنوانه: «The Anaesthetic Revelation and The Gist of Philosophy». تبع ذلك مراسلات بين الاثنين، وأجرى جيمس تجاربه الخاصة مع الإيثر. الشيء الغريب في بلود أنه لم يكن أحادياً، على العكس من معظم الصوفيين. وعمله المميز هو كتاب غريب بعنوان: *Pluriverse* (Boston: Marshall Jones, 1920). ويمكن أن نجد وصفاً جيداً لعلاقة بلود مع جيمس في: Hal Bridges, *American Mysticism: From William James to Zen* (Lakemont, Georgia: CSA Press, 1977).

أو فكرة، بدون أن يقلّبها ويديرها بين الواحد والكثرة؛ سيقع نتيجة ذلك في الحيرة، ثم سيوقع الآخرين في الحيرة أيضاً، سواء كانوا أكبر منه عمراً أو أصغر، أو حتى في مثل سنه، ولن يستثني أباً ولا أمّاً من ذلك. لن يكون أي إنسان يسمع كلامه في مأمن منه، ولا حتى كلبه، ولن يتمكن أي غريب من الهروب منه، إذا تعذّر العثور على مفسّر»[5].

ما المجموعة؟

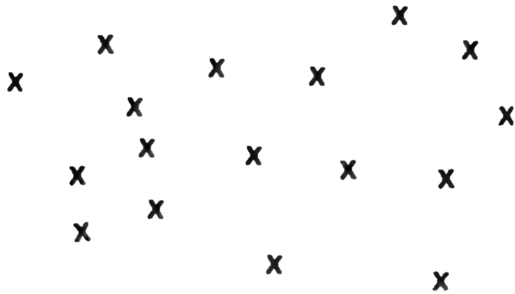
يبدو مستحيلاً أن نضيف شيئاً إلى تعريف كانتور الموجز للمجموعة في عام 1883: «المجموعة هي كثرة تسمح بأن نفكر بها على أنها شيء واحد»[6] تُعتبر القدرة على إدراك المجموعات ميزة بشرية أساسية. انظر النمط العشوائي التالي لـ X في الشكل 65.

إذا تمعّنت في الصورة، ستجد دماغك يبحث ويلاحظ أنماطاً متنوعة ومجموعات مختلفة. قد ترى في الجزء العلوي الأيمن شكلاً سداسي الأضلاع، أو من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين جَمَلاً ثنائي السنام. وقد ترى مثلثات أو علامات استفهام أو حتى مضرباً للتنس.

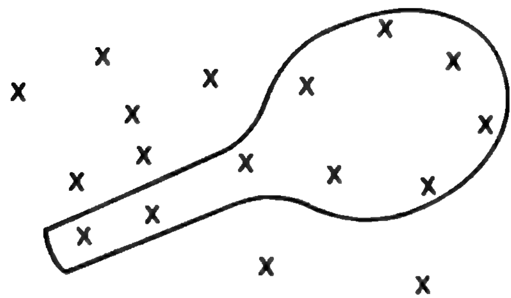
عندما تفكّر في زملائك ومعارفك، فإنك تميل إلى تصنيفهم في مجموعات متداخلة: أصدقاء، علماء، يشربون الكحول، هواة رياضة ما، آباء، وغير ذلك. كل الكتب التي تمتلكها، ووصفات الطعام التي تعرفها، والملابس التي في خزانتك، كل تلك البيانات المذهلة منظّمة، على المستوى الأكثر بدائية، من خلال العملية البسيطة والتلقائية لتكوين مجموعة؛ تلك الكثرة التي تسمح بأن نفكر بها كواحد.

5- Plato, *The Dialogues of Plato, Vol. 2,* Philebus 15 (B. Jowett, trans., New York: Random House, 1937), pp. 347–348.

6- Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen,* p. 204. «من خلال المجموعة، يمكنني عموماً أن أفهم أي كثرة على أنها واحد». كما تظهر مناقشة جيدة لهذا التعريف وغيره في الفصل السادس من كتاب وانغ *From Mathematics to Philosophy*. وتحتوي كلمة «مجموعة» بالطبع على معانٍ غير رياضية كثيرة. في الواقع، إن كلمة «set» تملك أطول تعريف في قاموس أوكسفورد الإنكليزي!



الشكل 65



الشكل 66

هل توجد مجموعات حتى لو لم يفكر فيها أحد؟ على سبيل المثال، الأعداد 2 و47 و48 و333 و400 و1981، لا تملك خاصية مشتركة واضحة، ولكن من الواضح أن من الممكن التفكير فيها معاً في وقت واحد، كما نفعل الآن. ولكن هل يجب أن يفكّر شخص ما في مجموعة لتوجد أم إنها موجودة من تلقاء ذاتها بغض النظر عن تفكيرنا؟

يمكن أن نرى ما سبق نسخة من الفكرة المبتذلة القديمة: هل يصدر صوت لسقوط شجرة إن لم يوجد بقربها من يسمعه؟ كان شكل مضرب التنس موجوداً في الصورة السابقة، حتى قبل أن ألاحظه. وبتحديدي له، لا أوجده، بل أشير إليه فحسب كميزة موجودة موضوعياً للعالم الخارجي.

إن مجموعة ما، حتى إن لم يلاحظها أحد، موجودة كفكر أو تصور مُحتمَل. وبالطريقة نفسها، إن صوت سقوط الشجرة المنعزلة موجود

كإدراك معين مُحتمَل، وهي حالة يمكن التعبير عنها بأنه: لو وُجد شخص بجانبها، لَسَمِعَه.

تفترض نظرية المجموعة الكانتورية على نحو أساس ومبسَّط أن المجموعات موجودة بالفعل، بغض النظر عن ملاحظة أحد ما لها. ويمكن أن نزيد على تعريف كانتور السابق: «المجموعة هي الكثرة التي تسمح بأن نفكر بها كواحد، إذا وُجد شخص يملك عقلاً كافياً ليحاول ذلك!»

وفق نظرية المجموعة، فإن المجموعة كلها تتمثل في كل عنصر منها. وإن المجموعة M، التي تشتمل على عشرة مليارات من الأعداد الطبيعية العشوائية، موجودة على الرغم من عدم قدرة أي إنسان على رؤيتها دفعة واحدة. المجموعة هي شكل من الفكر المحتمَل، حيث يجب أن تؤخذ كلمة «محتمَل» بأوسع معنى.

في هذه المرحلة، قد يسأل المرء إذا كان هناك أي شيء ليس بمجموعة، أو إذا كانت هناك أي «أفكار» غير محتمَلة. والجواب، ويا للمفاجأة، نعم! يمكننا أن نتخيل أن بعض المجموعات قد تكون عناصر في نفسها، وبعضها قد لا يكون كذلك. هنا، يمكن مناقشة المجموعة R التي تشتمل على كل المجموعات التي ليست عناصر في نفسها. وبلغة الرموز نقول: $R=\{x:x \notin x\}$.

ظاهرياً، لا يوجد سبب يمنع R أن تكون «كثرة تسمح أن نفكر بها كواحد». لكن إذا تساءلنا: هل R عنصر في $R \in R$ نفسها؟ هل ؟

إذا فكرنا قليلاً نجد أننا واقعون في مفارقة تشبه مفارقة الكاذب: إذا كانت R ، وهي مجموعة المجموعات التي ليست عنصراً في نفسها، عنصراً في نفسها، فعندها لا يمكنها أن تكون في مجموعة المجموعات التي ليست عنصراً في نفسها. ولكن يجب أن تشتمل R على نفسها، لأنها مجموعة المجموعات التي ليست عنصراً في نفسها!

وهنا يظهر لدينا أمر جديد. إذا اعتبرنا R مجموعة فسيكون لدينا أمور متناقضة كما رأينا. لذا نحن مضطرون إلى الاستنتاج بأن R ليست مجموعة. إذاً، R هي كثرة لكن لا تسمح بأن نفكر بها كواحد.

في نظرية المجموعات، نفترض عادة عدم وجود مجموعة تكون عنصراً في نفسها. يجسِّد هذا المبدأ، المعروف بمبدأ التكوين الجيني للمجموعات، فكرة وجود مجموعة بفضل خطوتين منطقيتين:

1) توجد مجموعة من العناصر.

2) يمكن دمج هذه العناصر في وحدة لتشكيل مجموعة.

وإن احتمال وجود مجموعة تكون عنصراً في نفسها سيؤدي بالخطوتين السابقتين إلى نكوص لانهائي، حيث ستعتمد كل خطوة على الأخرى في حلقة لا تنتهي. ليس لدينا تناقض مباشر هنا، لكن من الأفضل الحديث عن المجموعات التي تنشأ من مجموعات وعناصر أبسط فحسب.

نلاحظ هنا أن الفئة V، وهي الفئة الشاملة لكل المجموعات في نظرية المجموعة، تساوي R التي ذكرناها سابقاً، لأن نظرية المجموعة تفترض أن المجموعات ليست عنصراً في نفسها. وكما أثبتنا أعلاه أن R ليست مجموعة، فإن V كذلك. وهذه إحدى الطرق لإثبات أن كون نظرية المجموعة هو الكثرة التي لا تسمح بأن نفكر بها كواحد.

توجد طريقة أبسط لإثبات أن V ليست مجموعة؛ فباشتراطنا عدم وجود مجموعة تكون عنصراً في نفسها، نكون قد افترضنا أن V لا يمكن أن تكون مجموعة وإلا فإنها ستشتمل على نفسها كعنصر. لذا فإن V ليست مجموعة.

يعتمد منظرو نظرية المجموعة المصطلح «فئة» للإشارة إلى تراكم أو تعددية من أي نوع. قد تكون الفئة -أو لا تكون- قابلة للتحول إلى مجموعة. إذا لم تكن كذلك، فنسمِّيها «فئة صحيحة». وبالتالي، V فئة صحيحة.

أدرك كانتور جيداً الفرق بين التراكم والمجموعة بأنها فئات صحيحة. وكتب عن ذلك في رسالة مشهورة إلى ديديكايند عام 1899:

«إذا بدأنا من مفهوم التعددية المحددة للأشياء، فمن الضروري التميز بين نوعين من التعددية.

بالنسبة للتعددية، يمكن للافتراض بأن جميع عناصرها «معاً» يؤدي إلى تناقض، أي من المستحيل تصور التعددية كوحدة، كـ«شيء واحد منته». أدعو مثل هذه التعدديات **المطلق اللانهائي** أو الكثرة غير المتسقة. كما نرى

بوضوح، فإن «مجموع كل ما يمكن أن نتصوره»، على سبيل المثال، هو كثرة مماثلة لذلك...»[7].

ربما يتذكر القارئ أننا ناقشنا النقطة الأخيرة في قسم «المطلق اللانهائي».

7- الاقتباس مأخوذ من الترجمة المنشورة «Letter to Dedekind» في Jean van Heijenoort's anthology, From Frege to Gödel, p. 114. تحتوي هذه المختارات القيِّمة على مواد أخرى مهمة حول أصول مشكلة الواحد والكثرة في نظرية المجموعات بما في ذلك Cesare Burali-Forti's 1897, «A Question on Transfinite Numbers», pp. 104-112. هذا البحث هو الأول في الإشارة إلى أن النمط الترتيبي لـ أوميغا الكبيرة Ω من فئة كل الأعداد الترتيبية يمثِّل فكرة إشكالية، وذلك لأنه من ناحية، يجب أن تكون Ω أكبر عدد ممكن، ومن ناحية أخرى، إذا كان لدينا Ω، فما الذي يمنعنا من تكوين Ω+1، وبذلك لا تبقى Ω هي العدد الأكبر؟ إن السبيل الوحيد للخروج من هذه الإشكالية هو التأكيد أن اللانهاية المطلقة موجودة كـ «كثرة غير متناسقة» فحسب، فلا يكون لدينا فعلاً عدد أكبر محدّد وقابل للتصور. لكن ما الذي نعنيه إذاً عندما نقول Ω؟

كما يوجد بحث مهم آخر في هذه المختارات، وهو «Letter to Frege», pp. 124-125. كان فريج منظِّراً لنظرية المجموعة ما قبل الكانتورية، والذي أنشأ أساساً للرياضيات بناءً على افتراض أنه لأي خاصية P، يمكن أن نشكِّل مجموعة محددة، تدعى $\hat{x}P$، والتي تحوي كل الكائنات ذات الخاصية P. وفي عام 1902، اكتشف برتراند راسل أن مبدأ صياغة مجموعة لامحدودة يقود إلى «مفارقة راسل» للمجموعة *R* التي تحوي كل المجموعات التي ليست عنصراً في نفسها. وعندها يجب أن تكون عنصراً في نفسها، وفي الوقت نفسه لا يجب أن تكون كذلك. كتب راسل هذه المفارقة وأرسلها إلى فريج، الذي كان على وشك أن ينشر الجزء الثاني من *Grundgesetze der Arithmetik*.

يظهر رد فريج على راسل في van Heijenoort anthology (pp. 126-129)، وهو جدير بالاقتباس لما يحمله من موضوعية علمية رائعة. ويجب أن نذكر هنا أن مفارقة راسل تسبّبت على نحو أساس بتدمير جزء كبير من العمل الذي كرَّس فريج حياته له. كتب ريج في ردّه:

«تسبب اكتشافك للمفارقة بدهشة عظيمة لي، وأكاد أقول بالذعر، لأنه زعزع الأساس الذي كنت أنوي بناء الحساب عليه... الأمر خطير ليس على الحساب الذي أنشأه فحسب، بل حتى إن الأسس الوحيدة الممكنة للحساب يبدو أنها تتلاشى... على أي حال، فإن اكتشافك رائع للغاية، وربما يؤدي إلى تطور كبير في المنطق، وهو أمر غير مرحَّب به للوهلة الأولى... سيُنشر المجلد الثاني الخاص بي قريباً. ولا شك أن عليَّ إضافة ملحق يؤخذ فيه اكتشافك بالاعتبار. لو كانت لدي وجهة النظر تلك!»

إذا افترضنا أن «الفكر» يعني «الفكر الشائع العقلاني المبني من أشكال أبسط»، فمن الواضح أنه في أي كون من الأفكار المحتمَلة ستكون الفكرة الكلية له غير محتواة فيه. لذا أي محاولة للتفكير في كل شيء يمكن التفكير فيه ستقود إلى تسلسل لانهائي من التقريبات التي لا تبدو أنها تتلاقى مع أي شيء محدّد.

تأتي أهمية هذا النمط من أنه نسخة مطابقة من محاولتنا تشكيل «مجموعة كل المجموعات». فكل كون يحتوي المجموعات كلها هو فعلياً مجموعة، لكن كما أثبتنا سابقاً، لا يمكن أن يكون مجموعة.

النتيجة هي أنه إذا وُجدت فئة واحدة ومحددة V تحوي كل المجموعات، فيجب أن تكون ضبابية أو غير قابلة للتصور، ولا تقبل أن تتوحد في مجموعة V هي الكثرة التي لا تسمح بالتفكير بها كواحد.

لكن هل يمكن ذلك حقاً؟ ألا نتحدث الآن عن V كما لو أنها شيء واحد ومحدّد؟ أليس كون نظرية المجموعات شيئاً واحداً؟ هذه العقدة الصعبة هي مشكلة الواحد والكثرة.

سأحاول في القسم التالي أن أجعل السؤال حيوياً أكثر من خلال تقديم أفضل وصف نعرفه عن V. ولكن يجب أن نلاحظ أولاً مدى تشابه سؤال الواحد والكثرة حول V مع الأسئلة الأخرى التي ظهرت.

في نهاية «مفارقة بيري»، توصلنا إلى استنتاج مفاده أن «قابلية التسمية غير قابلة للتسمية». وبدقة أكثر، ناقشنا أول عدد لا يمكن للعقل البشري تسميته. المشكلة هنا أنه من ناحية، هناك تعددية غير قابلة للتوحيد لجميع الأسماء في اسم واحد يشير إلى الأعداد الأقل من u_0؛ ومن ناحية أخرى، هناك المفهوم المحدد لـ «قابلية التسمية» والطبيعة المحددة للعدد u_0. كيف نتحدث عن «قابلية التسمية» بينما هي مفهوم غير قابل للتعريف؟ وكيف نتحدث عن الفئة V بينما هي في الواقع ليست شيئاً واحداً ومحدداً؟ كيف للعقل البشري أن يفعل ذلك؟

لتجنب خطر الوقوع في التكرار، اسمحوا لي أن أشير إلى الأماكن الأخرى التي ظهر فيها هذا النمط.

رأينا في «مفارقة ريتشارد» أن العدد الحقيقي الذي يرمز لجميع الأعداد

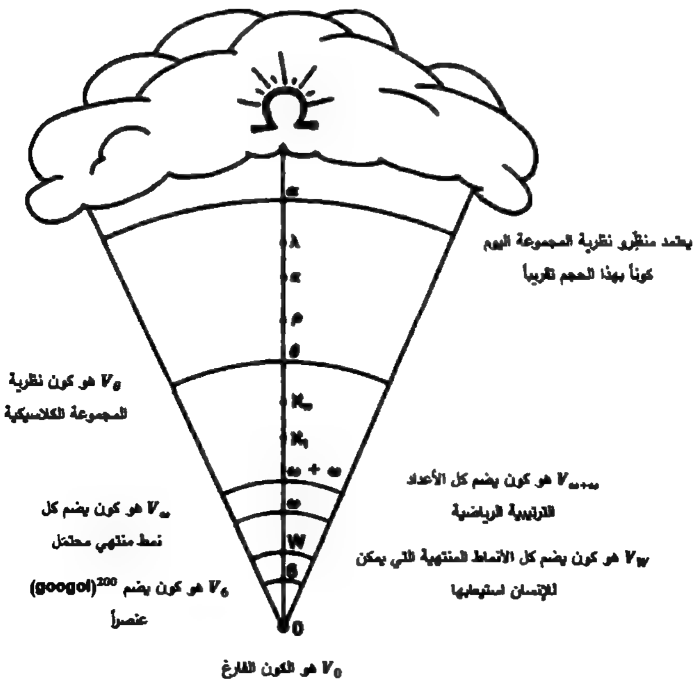
الحقيقية القابلة للتسمية، هو عدد غير قابل للتسمية. ومع ذلك أسميناه في إطار عملية مناقشته. وفي الأقسام «ما هي الحقيقة» و«نظرية غودل لعدم الاكتمال»، لاحظنا أن الحقيقة الرياضية ليست قابلة للتعريف رياضياً. لدينا مفهوم واحد وموحَّد للحقيقة يوجه جهودنا، ومع ذلك لا يوجد هذا المفهوم كأي تعريف واحد ومحدّد، بل كتعددية غير قابلة للتوحيد لجميع البيانات الحقيقية. كما رأينا في قسم «نحو وعي الروبوت» أنه على الرغم من شعور الشخص بأنه واحد، إلا أنه لا يستطيع أبداً استيعاب أو معرفة وصف موحَّد لسلوكه؛ فالشخص قادر أن يصف أفعاله وشخصيته كتعداد عشوائي من التفاصيل فحسب، على الرغم من أن معطيات الوعي الأكثر أولية هي وحدة.

هناك أثر لمشكلة الواحد والكثرة عند النظر إلى مجموعة الأعداد الطبيعية N. فحتى لو شعر المرء أنه لا يمكن أن توجد مجموعة إلا إذا كانت منتهية، فإنه لن يرى كيف يمكن للتعددية N أن تتشكل في شيء واحد منتهٍ. وعلى المنوال نفسه، سيجد صعوبة في تصديق أن أوميغا عدد واحد ومحدّد. تشكل هذه الشكوك حول مجموعة الأعداد الطبيعية N أساس مدرسة فكرية تُعرف بالمدرسة الحدسية، والتي تقول إن الحقائق والمبادئ الأساسية -خاصة تلك المتعلقة بالأخلاق والميتافيزيقيا- تُعرف مباشرة بالحدس. وفق هذه المدرسة، لا توجد مجموعات مكتملة لانهائية فعلية، بل يوجد مجموعات لانهائية محتمَلة فحسب. ويمكن أن نصف الموقف الحدسي بأنه يقوم بمساواة اللانهاية البسيطة أوميغا مع المطلق غير القابل للتصور أوميغا الكبيرة[8]. لكن نظراً لعدم وجود سبب منطقي يمنع وجود مجموعات لانهائية قابلة للتصور، فسنتابع طريقة كانتور في مناقشتها.

8- لعرض أوسع وأكثر وضوحاً عن الحدسية، انظر: Michael Dummett, *Elements of Intuitionism* (Oxford: Clarendon Press, 1977). انظر أيضاً: «The Actual Infinite», *Speculations in Science and Technology 3* (April, 1980), pp. 63–76.

كون نظرية المجموعة

يمثِّل الشكل 67 الصورة الأساسية لكون نظرية المجموعة. لدينا في المنتصف عمود يتكون من جميع الأصول. وبعد أن نتجاوز كل الأصول، نصل إلى المطلق اللانهائي، أوميغا الكبيرة. أو ربما كان ذلك مجرد وهم، لأن وجود أوميغا الكبيرة هو شكل آخر من مشكلة الواحد والكثرة.



الشكل 67

المجموعات النقية والكون الفيزيائي

يبدأ كون نظرية المجموعة من نقطة مفردة تسمَّى المجموعة الخالية. في البداية، لا يوجد شيء على الإطلاق، ثم يوجد شيء: فكرة تشكيل مجموعة. يُشار إلى المجموعة الخالية برموز مختلفة (0 أو Ø أو { }). إن المجموعة الخالية شيء، ولكن لا شيء داخلها. والتفكير في ذلك يذكرنا بما يُعرف بالسؤال الفلسفي الأساس: لماذا يوجد شيء بدلاً من لا شيء[9]؟ لا أحد يعرف الجواب حقاً، لكن حقيقة وجود شيء هي الحقيقة المعروفة الوحيدة التي لا جدال فيها على الإطلاق في هذا العالم.

لماذا توجد المجموعة الخالية؟ لا أحد يعرف، لكنها توجد. إنها الفكرة الأولية لتكوين مجموعة، وهي جانب موضوعي من العالم حولنا.

إذا تابعنا التعرف على V، كون نظرية المجموعات المستمر بالاتساع، سنرى مجموعات متزايدة في التعقيد تنتشر فوق المجموعة الخالية. تسمَّى هذه المستويات المختلفة «الأكوان الجزئية» أو V_a. ويمكن أن نحدّد تعقيد أي مجموعة x من خلال عدد ترتيبي يُدعى رتبة x. ونقول عموماً إن V_a هي المجموعة التي تحوي كل المجموعات ذات الرتبة الأقل من a.

عندما نتحدث عن المجموعات في الحياة العادية، فإننا نعني مجموعات من الأشياء. يختلف الأمر في الرياضيات، فنحن نتحدث عن مجموعات نقية، أي مجموعات عناصرها هي مجموعات نقية أخرى. إن أبسط مجموعة نقية هي المجموعة الخالية، تليها المجموعة التي تحوي عنصراً واحداً فقط، وهو المجموعة الخالية. تُدعى هذه المجموعة { {} } أو { Ø } أو 1. نلاحظ أن { {} } تختلف عن {} بالطريقة ذاتها التي تختلف بها المجموعة التي تحتوي على تفاحة واحدة عن التفاحة نفسها. إن المجموعة { {} } تحمل شيئاً بين أقواسها، بينما {} لا تحمل شيئاً. قمت أدناه بكتابة بعض المجموعات النقية البسيطة.

9- انظر المقالتين: Why, «Paul Edwards, *Encyclopedia of Philosophy*, V.8», pp. 296-302. و Nothing, «P. L. Heath, *Encyclopedia of Philosophy*, V.5», pp. 524-525.

⋮ ⋮

Rank 3: {{{{}}}} {{{{}}},{{},{{}}}} {{},{{},{{}}}} . . ..

Rank 2: {{{}}} {{},{{}}}

Rank 1: {{}}

Rank 0: {}

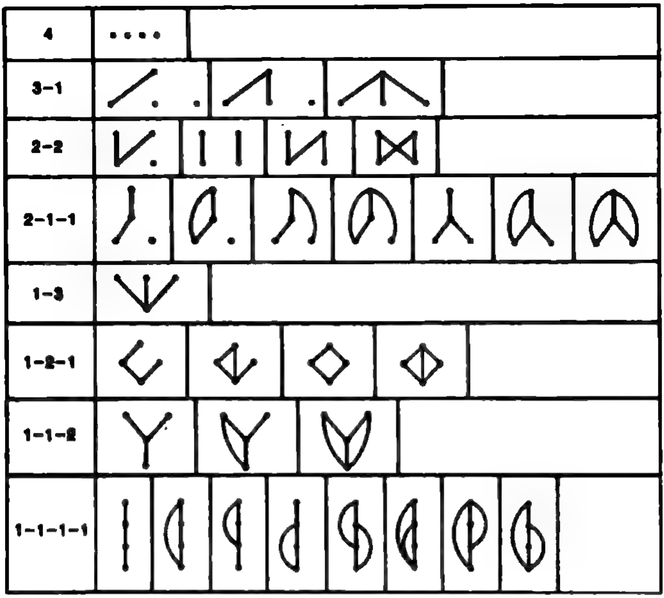
الشكل 68

قد يبدو من الصعب والغريب أن تصنع شيئاً من لا شيء بهذه الطريقة، لكنه ممكن بالتأكيد. تُبنى المجموعات النقية من الهواء الرقيق والفكرة البسيطة لتشكيل مجموعة. هذا كل ما تحتاجه. يمكن تمثيل كل شجرة علاقات قابلة للتصور بالعلاقة داخل مجموعة ما من المجموعات.

رسمت في الشكل 69 جميع العلاقات الممكنة التي يمكن تكوينها بين أربعة أشياء أو مجموعات. (توصلت إلى إحدى وثلاثين علاقة، وأعتقد أنه أكبر عدد ممكن لذلك). تشير النقاط إلى الكائنات المختلفة، وإذا افترضنا أن النقطة A مكوِّن للنقطة B، فإننا نرسم B بمستوى أعلى من A مع خط قادم من A إلى B. يؤدي الرسم بهذه الطريقة إلى تجمُّع النقاط في مستويات مماثلة لتجمُّع نظرية المجموعات المحدّد حسب المرتبة. ويمكننا وصف نمط المستوى بالأرقام، كما أوضحت في الشكل ذاته.

ما من أهمية جوهرية لهذا النوع من الترميز، وهناك طرق أفضل لترميز الأنماط كمجموعات. لكن مثل هذه الأمثلة تعطي لمحة عن الفكرة الرئيسية، وهي: *يمكن لأي نمط نتصوره أن يُرمَّز بواسطة مجموعات.*

إن الشعار «المجموعة هي شكل لفكر محتمَل»، يخدم كلا الجانبين من النقاش. فمن ناحية، تُعتبر التعددية مجموعة عندما يمكن النظر إليها كشكل من الفكر المحتمَل الموحَّد. ومن ناحية أخرى، يمكن أن نرمِّز أي فكر محتمَل في شكل مجموعة.



الشكل 69

نجد تأكيداً على الملاحظة الأخيرة في أن كل كتاب رياضيات تقريباً يبدأ بقسم عن المجموعات. وعلى سبيل المثال، يمكن ترميز الأعداد الطبيعية كمجموعة بالطريقة التي ناقشناها أعلاه. ويمكن ترميز الكسور والامتدادات العشرية اللانهائية والتوابع والعلاقات وحقول الأعداد وغيرها كمجموعات، بطريقة أو بأخرى. إن كل شيء في الرياضيات قابل للتمثيل كمجموعة.

إذا كان الواقع هو الفيزياء، والفيزياء هي الرياضيات، والرياضيات هي نظرية المجموعة، إذاً *كل شيء هو مجموعة*[10]. أنا مجموعة، وأفكاري

10- هل من المشروع فعلاً اعتبار الكائنات الفردية المختلفة في العالم كمجموعات؟ قد يرفض بعض أتباع مذهب الجوهر ذلك، بحجة أنه من أجل التعبير على نحو كامل عن جميع جوانب أي شيء ممكن، فمن الضروري إدخال كل شيء في التعبير حتى لا يجسِّد أي كائن فردي شكلاً يمكن تصوره.
توجد نقطتان ضعيفتان أيضاً في الرأي القائل بأن كل شيء عبارة عن مجموعة. أولاً، نحن نختبر دائماً الحقيقة بأن الأشياء هي ذاتها وليست شيئاً آخر -إنني أنا والعالم هو

مجموعات، وعواطفي مجموعات. في بعض الأحيان، أكرّس بعض الوقت في محاولة لتصديق هذه الاستنتاجات بطريقة تجريبية فورية. فإذا كان كل شيء مجموعة، لن يوجد إلا الشكل النقي، وهذا أمر لطيف. يمكن للكون الفيزيائي بأكمله أن يكون مجموعة كبيرة واحدة.

لنعد الآن إلى صورة كون نظرية المجموعة التي بدأنا بها هذا القسم. بالانتقال إلى الأعلى، نحصل على مجموعات ذات رتب أعلى. عموماً، تحوي V_{a+1} كل المجموعات الفرعية الممكنة من V_a. ومن الممكن إثبات أنه لأي عدد منته n، فإن V_{a+1} ستحتوي على 2_n من العناصر. (أي تكراراً أسياً كما شرحنا في قسم «من أوميغا إلى إبسيلون–صفر»).

$$1 = {}^{0}2$$

$$2 = {}^{1}2$$

$$4 = 2^{2} = {}^{2}2$$

$$16 = 2^{4} = 2^{2^{2}} = {}^{3}2$$

$$46.000 \approx 2^{16} = 2^{2^{4}} = {}^{4}2$$

$$\text{غولول}^{200} = (10^{100})^{200} = 10^{20.000} \approx 2^{64.000} = 2^{2^{16}} = {}^{5}2$$

من الواضح أنه لا يمكننا كتابة، أو حتى التفكير، في كل مجموعات الرتبة السادسة. ولكن هناك بالتأكيد مجموعات عديدة ذات رتب أعلى يمكننا التفكير فيها، مثل مجموعة 100*.

العالم– وهذا النوع من الخصوصية لا يتمّ توفيره فيَّ بالقول إني نقطة معينة في نظام علائقي معقد. وهذا يعني أنَّ ما من طريقة لتمثيل وجود هذا العالم عن طريق نظرية المجموعة. يمكن الرد على هذا الاعتراض بالقول إن كل عالم ممكن موجود بالفعل. يرى الاعتراض الثاني أن نموذج نظرية المجموعة لا تفسّر سير العالم. يتحدث جون ويلر عن هذه الصعوبة على أنها تشبه غرفة متخيَّلة مليئة بالمعادلات تهدف إلى تمثيل فيزياء الكون: «قف وانظر إلى كل هذه المعادلات، ربما يكون بعضها أكثر مدعاة للتفاؤل من بعضها الآخر، أعطِ أمراً: «طِر!» لن تطير أي من هذه المعادلات؛ لكن الكون «يطير» Misner, Thorne & Wheeler, *Gravitation* (San Francisco: W. H. Freeman, 1973), p. 1208. ويمكن تلبية الرد على هذا الاعتراض من خلال التأكيد على أنه لا يوجد شيء في «حياة» العالم أكثر من الأشكال والتكوينات المختلفة التي تحدث.

حددنا سابقاً، في قسم «مفارقة بيري»، العدد W كأول عدد طبيعي أكبر من أي عدد منتهٍ قابل للتسمية من قبل العقل البشري. ومن الواضح أنه إذا تمكنّا من تسمية مجموعة، فيمكننا تسمية رتبتها، لذا لن توجد مجموعات منتهية قابلة للتسمية بشرياً برتبة أكبر من W. أي إن كل الأفكار البشرية محتواة في V_W. كما يمكن الإشارة إلى مجموعات تتجاوز ذلك، مثلاً V_ω.

لا يوجد مفارقة حقيقية في ذلك، طالما أننا نعتقد أن المجموعات توجد موضوعياً وخارج الأنشطة البشرية. فعندما يتحدث أحد ما عن V_ω، يمكن ترميز حالة دماغه كمجموعة فيها، لكنه ما يزال يتحدث عن V_ω الحقيقية. ولتوضيح ذلك نقول إننا لسنا كائنات ثنائية الأبعاد في الحقيقة، مع أننا نظهر في الصور الفوتوغرافية كذلك. إن الصورة تختلف عن الحقيقة.

إن المجموعة V_ω هي مجموعة «محدودة وراثياً»، أي يمكن كتابتها على نحو صريح بعدد محدود من الأقواس والفواصل. والمجموعة V_ω، بطبيعة الحال، مجموعة لانهائية عدد عناصرها $\aleph_0$ على وجه الدقة. وهي تضمّ ترميزاً لكل عدد طبيعي.

أما المجموعة $V_{\omega+1}$ فهي أكبر بكثير، ومن الترتيب $2^{\aleph_0}$، أو c. ويمكن ترميز كل عدد حقيقي في هذه المجموعة.

نعتبر الدالّة ذات القيمة الحقيقية، والتي ندرسها في حساب التفاضل والتكامل، كمجموعة من أزواج الأعداد الحقيقية. وبالنسبة للصورة التي ناقشها، فليس من الصعب رؤية أننا عندما نصل إلى $V_{\omega+\omega}$، سيكون لدينا مجموعات تمثّل كل ما يمكننا مناقشته في الرياضيات العادية.

قبل أن نكمل نقاشنا للصورة، لنتوقف لحظة عند سؤال مهم. لتكن U المجموعة التي تُرمِّز الكون الفيزيائي بأكمله، أين نتوقع أن نجد U في الصورة؟

إن هذا السؤال هو إعادة صياغة لما تساءلنا عنه في قسم «ترميز العالم»: ما مقدار المعلومات الموجودة في الكون؟ إذا كان الكون منتهياً تماماً، فإن المجموعة U ستكون في مكان ما من المجموعة V_ω، ربما V_{googol}. وحتى إذا كانت لانهائية، فإننا لا نتوقع أن تكون بعيدة جداً، ستكون بالتأكيد في $V_{\omega+\omega}$.

يبدو من الغريب فعلاً أن يكون كوننا الفيزيائي مجرد مجموعة U تطفو

في الكون الكبير V الذي يضمّ كل المجموعات المحتمَلة. هل من الممكن أن يكون الكون الرياضي V أكبر من الكون الفيزيائي U؟ وفق وجهة النظر هذه، توجد جميع الأكوان المحتمَلة كمجموعات في المجموعة V. لكن، هل من المنطقي أن يكون لدينا فكرة مثل V أكبر بكثير من العالم الحقيقي؟

يوجد دائماً احتمال، ناقشناه سابقاً في قسم «اللانهايات الفيزيائية العليا»، بأن المجموعة U التي ترمِّز الكون الفيزيائي أكبر بكثير مما نتوقع. وإذا وُجد العديد من الأكوان المتوازية التي يجب أن تُحتوى، وإذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى ما لانهاية، وإذا كان الزمن ممتداً إلى ما لانهاية، ففي أي من هذه الحالات ستكون U أكبر من أن تكون مجموعة، أي أكبر من أن تُحتوى في المجموعة V. في هذه الحالة، ستكون U المطلق اللانهائي، الكثرة التي لا تسمح بأن نفكر بها كواحد.

تعاكس تجربتنا اليومية أي اقتراح بأن U كبيرة جداً. لكن هناك مبدأ فلسفي تقليدي، هو مبدأ الوفرة، الذي يفترض أن الكون الفيزيائي غني كغنى كون نظرية المجموعة الذي يحوي الأشكال الأفلاطونية النقية. وبقدر ما وجدنا أن بإمكاننا ترميز أي بنية فيزيائية كمجموعة، فإننا نتوقع أن تكون V كبيرة كـ U أو أكبر منها. وبالمقابل، يؤكد مبدأ الوفرة على أن U يجب أن تكون كبيرة كـ V أو أكبر منها. نستنتج من ذلك أن U و V كبيرتان بالقدر نفسه.

ربما كان الاستنتاج أن V و U متطابقتان متطرفاً، ومن الصعب قبوله فعلاً. يمكننا أن نبدأ إثبات ذلك بملاحظة وجوب فهمنا أن U تتضمن كل الأكوان البديلة إضافة إلى كوننا المدرَك. ويمكننا بعد ذلك أن نشير إلى أن الكون البديل المحتمَل الخالي هو في الحقيقة شكل مجرد لا يختلف عن مجموعة.

بالنسبة لي، أجد من المنطقي أن ننظر إلى كوننا الفيزيائي كنقطة محددة U داخل V، لأني أرى أن مجموعة جميع الأفكار المحتمَلة عظيمة جداً. ومع ذلك، ربما يجادل شخص آخر بأن العكس هو الصحيح، وأن V داخل U[11].

11- يعترض بعض أتباع الشكلية على الوجود الموضوعي للمجموعات، ويعرِّفونها ببساطة كحالات للدماغ البشري. وإن التفكير في مجموعة ما لا يتعدى كونه نمطاً عصبياً منتهياً معيناً يحدث أحياناً في العالم المادي. لكن هذا الاعتراض –وهو نقطة

نعلم من الأسباب المختلفة التي ناقشناها في قسم «ما هي المجموعة؟»، أن الفئة V التي تضمّ كل المجموعات ليست مجموعة. إن V ليست شكلاً لفكر محتمَل. يعني ذلك أن أي شخص يعتقد أنه يفكر في V الحقيقية، فهو في ضلال.

يماثل وضع V ما تحدثنا عنه سابقاً حول المطلق الماورائي أو اللاهوتي. يتفق جميع المفكرين الذين ناقشوا المطلق على نقطة واحدة: لا يُعرف المطلق بطريق عقلاني. وكما سبق ذكره في قسم «المطلق اللانهائي» في الفصل الأول، يصف القديس غريغوريوس ذلك على النحو التالي: «مهما وصلنا بعقلنا في تأمل الإله، فإننا لا نصل إلى ما هو عليه، لكن إلى ما تحته»[12].

قدَّم إرنست تسيرميلو، أحد مؤسسي نظرية المجموعة الحديثة، ملاحظة

ضعف الشكلية- لا يعطي تفسيراً لسبب أن نقاشنا للمجموعات يبدو ذا معنى، وأن بعض الحقائق حولها صحيحة. إن الرد على الشكلية يشبه الرد على وحدة الأنا: إذا كان كل شيء مجرد حلم لي، فلِمَ تُظهِر الأشياء مثل هذا العوز الشديد العنيد للاهتمام برغباتي وأفكاري المسبقة؟

كان أبراهام روبنسون من أفضل المتحدثين باسم الشكلية.

انظر: «Formalism 64», in Y. Bar-Hillel, ed., *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Amsterdam: North-Holland, 1964), pp. 228-246.

انظر أيضاً: Paul J. Cohen, «Comments on the Foundations of Set Theory», in Dana S. Scott, ed., *Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XIII, Part 1* (Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1971), pp. 9-15.

عموماً، إن أي مناقشة مكتوبة بعناية حول هذه الأسئلة التأسيسية هي مناقشة ذات قيمة. لحسن الحظ، يبدو أن الوقت الذي كان فيه فلاسفة الرياضيات غاضبين من هذه القضايا أصبح من الماضي. لكن بالطبع، قد يغيّر كتابنا هذا، «اللانهاية والعقل»، ذلك!

12- يظهر هذا الاقتباس في: Fr. Allen Wolter, «Duns Scotus on the nature of man's knowledge of God», *Review of Metaphysics*, I: 2 (1941), p. 9.

مماثلة لذلك حول المجموعات: «يمكن اعتبار أي نموذج موصوف خصيصاً من نظرية المجموعة كمجموعة في حدِّ ذاته، أي كعنصر في نموذج أعلى من نظرية المجموعة»[13].

تمت صياغة هذه الفكرة في نظرية المجموعة الحديثة في مبدأ الانعكاس: لأي وصف مقترَح لـV، سيوجد كوناً جزئياً V_a يفي بشروط الوصف أيضاً. يتبين أن أي كون موصوف خصيصاً لنظرية المجموعة هو واحد فقط من مجموعات V_a، وليس الكون بأكمله. مجدداً، العقل لا يصل إلى الإله، بل إلى ما تحته.

لتوضيح ذلك، سأشرح الآلية الكامنة في مبدأ الانعكاس. لنحاول أن نفكر في فئة كل المجموعات V. في البداية، ربما نفكر في المجموعات المحدودة فحسب، أي عناصر V_ω. لكن بعدها سندرك أن V_ω ذاتها تُعتبر مجموعة. تعاملت نظرية المجموعة الكلاسيكية مع المجموعات ذات الرتبة الأقل من θ، وهو «أول عدد أصلي متعذِّر الوصول» أو «منيع» (انظر قسم «الأصول الكبيرة» في التدريب الأول). ولكن في مرحلة ما، يتضح لنا أن كون نظرية المجموعة الكلاسيكية هو مجموعة كبيرة واحدة في V_θ.

في كل مرحلة من مراحل تطوير نظرية المجموعة، نتعامل مع مجموعات أكبر وأكبر. ولكن سنجد دائماً أن هنا أعداداً ترتيبية أكبر من كل عدد نصل إليه ونسمِّيه. عندما نستوعب ذلك، نسمِّي هذا العدد a. وحينها ندرك أن الكون القديم كان مجموعة V_a، ونبدأ العمل مع كون أكبر.

يمكننا مقارنة هذه العملية بمحاولة التفكير في كل الأفكار المحتمَلة. توجد العديد من الأفكار في الوعي في أي لحظة. لكن الآن، مع التقدم إلى مستوى أعلى من الوعي الذاتي، يمكن للمرء أن يجمع كل الأفكار السابقة ويضعها معاً في فكرة جديدة، T. تشكِّل هذه الفكرة الجديدة مع الأفكار القديمة حالة جديدة وموسَّعة من الوعي، وبخطوة أخرى للمرء خارج نفسه، يظهر فكر أعلى T^*.

13- هذه الترجمة من الصفحة الأخيرة من: Ernst Zermelo, «Über Grenzzahlen und Mengenbereiche», *Fundamenta Mathematica 16* (1930), pp. 29-47.

يبدو أن لانهاية لهذه العملية. إنه نوع من الجدال الهيغلي، الذي يتحرك بدون نهاية نحو الكون المطلق لجميع المجموعات أو الأفكار المحتمَلة. وعلى وجه الدقة، يمكننا تمييز العملية من حيث الطرح-التناقض-التوليف من خلال القول إن:

- مكوِّن الطرح هو وصف اللاوعي اللحظي للمطلق.
- مكوِّن التناقض هو صياغة الوعي لهذا الوصف.
- مكوِّن التوليف هو تكوين وصف جديد من اللاوعي للمطلق، والذي يشتمل على الأوصاف السابقة مع الإدراك بأنها غير كافية.

يمكننا أن نسمِّي هذه العملية بـ «التاريخ الفكري».

إذا كان المطلق واحداً، فهذا يعني وجود نقطة فريدة محددة أو مفهوم في نهاية أي تاريخ من هذا النوع. أما إذا كان المطلق كثرة، فيوجد الاستنباط المتسلسل اللانهائي من المقاربات، مع عدم وجود أي فكرة توجيهية واحدة في النهاية.

نجد نموذجاً لوجهتي النظر المذكورتين في اثنتين من المتتاليات اللانهائية: متتالية زينون (...+ ⅛ + ¼ + ½ +1)، ومتتالية غراندي (+1 -1 ...+1 -1). تقودنا متتالية زينون إلى الاقتراب أكثر وأكثر من القيمة المحددة والمنتهية لـ 2. بينما تضعنا متتالية غراندي في تردد لانهائي بين 0 و1.

إذا كان a عدداً ترتيبياً محدوداً (أي عدداً مثل ω بدون أي عدد سابق مباشر)، فلن يوجد في الكون الجزئي V_a عدد ترتيبي أخير. لكن إذا كان a من الشكل $\beta+1$، عندها سيوجد في V_a عدد ترتيبي أخير، وهو β. والآن، هل نعتبر الكون V بأكمله نهاية من النوع الأول من الأكوان الجزئية، أم من النوع الثاني؟ هل يوجد عدد ترتيبي أخير، وهو أوميغا الكبيرة، أم لا يوجد؟

يمكن أن ننظر إلى المقاربة نحو «المثالي» كتاريخ فكري يتكون من المزيد والمزيد من المفاهيم المعقدة. ربما كان المثالي هو المفهوم الأخلاقي للفضيلة، أو المفهوم اللاهوتي للإله، أو المفهوم الرياضي لـ V، أو المفهوم المنطقي للحقيقة، أو المفهوم الفني للجمال، أو المفهوم الروحاني للحب.

بينما نتطور في هذا الطريق، فإننا ننتقل إلى مستويات أعلى تتجاوز

اللانهايات. على الرغم من أننا لا نستطيع التفكير في كل عدد طبيعي، إلا أن الفكرة العامة للأعداد الطبيعية تقتضي أن نخرج من V_ω. بالنسبة للمعرفة المتبادلة، نقول إن A وB يفهمان بعضهما البعض على نحو كامل إذا كان A يعرف أن B يعرف أن A يعرف أن B... فإذا كان A وB يدركان ذلك، سينتقلان معاً متجاوزين المستوى السابق ω.

لا نحتاج في الواقع إلى التعامل مع مثل هذه المفاهيم عالية المستوى لمواجهة مشكلة الواحد والكثرة. كما يقول أفلاطون، يجري الواحد والكثرة معاً في كل كلمة منطوقة. نذكر هنا أحد أمثلة الفلسفة التمهيدية القديمة، وهو «ماذا أعني عندما أقول (طاولة)؟» بالتأكيد، لدينا المفهوم الأساس لـ«الطاولة»، لكن إذا حاولنا تحديده بالكلمات فسنجد أنفسنا في سلسلة لانهائية من التحسينات للوصول إلى التحديد الكامل. سنحاول أن نضمِّن الطاولة ذات الأرجل الثلاث، والطاولة ذات الارتفاع المنخفض، والطاولة الملصقة بالحائط، وطاولة العمليات، وغيرها. إننا نستخدم الكلمة كـ«واحد»، لكننا نلفظها في تفاصيل ما تعنيه لتغرقنا في كثرة لانهائية.

ربما لو توقف الزمن، لأمكننا الوصول إلى المطلق. لكن الزمن يمضي، وما إن يعتقد المرء أنه رأى المطلق وحاول أن يتحدث عنه، حتى يجد أن الحديث أصبح عن فكرة أخرى، عن خطوة أخرى في الطريق المتصاعد. لأي عدد أسمِّيه، يمكنك دائماً أن تضيف إليه عدداً آخر. وهكذا، لن تكون الكلمة الأخيرة لأحد. وسيكوِّن مبدأ الانعكاس هذه الفكرة.

لذا، في إطار الأشياء التي يمكن وصفها بالكلمات، إن المطلق هو كثرة غير قابلة للوصف. ويمكننا أن نتوقف هنا. لكن العديد من الأشخاص، بمن فيهم أنا، نشعر أن المطلق المفرد موجود أمامنا يحدِّق إلينا، ولنسمِّه الوجود الصافي. كما قال فيتغنشتاين: «توجد بالتأكيد أشياء لا نستطيع وصفها بالكلمات. تتجلَّى بذاتها. هذه الأشياء هي ما ندعوها صوفية»[14].

يظهر لنا الآن نوع آخر من مشكلة الواحد والكثرة. هل المطلقات المختلفة متطابقة؟ هل الإله والحقيقة والجمال وفئة كل المجموعات

14- المقطع 6.522 من: Tractatus, Wittgenstein, pp. 149–151

وفضاء العقل والخير وغيرها، هي وجوه مختلفة للانهائي المفرد، الواحد؟ هذا مثير للشك بالتأكيد. إذا كانت الحكمة كلها تقود إلى الشيء نفسه، إذاً لِمَ توجد العديد من الأديان المختلفة، والعديد من مدارس الفكر وطرق البحث عن الحقيقة؟ هل يبحث الرياضي والكاتب عن الشيء نفسه؟

هناك نظير لهذه المشكلة في نظرية المجموعة. في نظرية المجموعة، لدينا نوعان مختلفان من المطلق: اللانهاية، ممثَّلة بـ«أوميغا الكبيرة Ω»، وكل شي، ممثلاً بفئة كل المجموعات V. يمكن التفكير في أوميغا الكبيرة على أنها فئة كل الأعداد الترتيبية، بينما V هي فئة كل المجموعات. الآن، كل عدد ترتيبي قابل للتمثيل كمجموعة، لذا على المستوى البسيط، V أكبر من Ω. لكن في السعي لتحقيق التكافؤ بين جميع المطلقات، يمكننا بدلاً من ذلك أن نسأل ما إذا كانت كل مجموعة مرمَّزة بعدد ترتيبي ما؛ أو من حيث عدد العناصر هل $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{\Omega}}$؟ أي هل «اللانهاية» كبيرة كَكِبر «كل شيء»؟

لا أحد يعرف الجواب الحقيقي. إن التوكيد $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{\Omega}}$ يعني أن هناك تطابقاً (واحد لواحد) بين فئة كل الأعداد الترتيبية وفئة كل المجموعات. لكن بما أن تطابقاً من هذا النوع هو فئة صحيحة، فمن الصعب التأكد من وجودها. يسمِّي منظِّرو نظرية المجموعة الافتراضَ الصريح بوجود مثل هذا التطابق «بديهة الاختيار العالمي»، أو «بديهة قابلية العدد الترتيبي للتعريف». (انظر أيضاً نهاية «الاستمرارية» في التدريب الأول، حيث أُشير إلى العلاقة بين الاختيار العالمي ومشكلة استمرارية كانتور).

بالنسبة لي، أعتقد أن من المهم للغاية إعطاء مشاكل الميتافيزيقيا مجموعة واضحة من الصيغ النظرية. أعرب غودل مرة عن وجهة نظر تقول إن الفلسفة في أيامنا هذه في حالة تماثل حالة الفيزياء قبل نظرية نيوتن للجاذبية. ربما يكون دور نظرية المجموعة أن تقدِّم للفلسفة ما قدَّمه حساب التفاضل والتكامل للفيزياء.

بداية التنوير

الواحد والكثرة	
اللانهاية الفعلية الأفلاطونية	**اللانهاية المحتملة الشكلية**
الحقيقة الأفكار الدلالات العقول	قابلية الإثبات الكلمات الإعراب الآلات
الأعداد الحقيقية القابلة للتسمية	**الأعداد الحقيقية العشوائية**
Ω $\aleph_1$	V C
الصوفية: $0 = \infty$ طريق الوحدة = الطريق الداخلي براهمان (الروح الفائقة العالمية) = أتمان (النفس أو الأنا الداخلية) كل شيء = أنا أكون	**العقلانية**
القسم الأيمن من الدماغ برانا	القسم الأيسر من الدماغ فيجنانا

ساتوري
بداية التنوير

لقد وصلنا إلى نهاية هذا الكتاب. في الجدول أعلاه، عرضت الأمور التي أودّ قولها. ما لدينا هنا هو جدول من الأضداد، على نمط فيثاغورس. وكما يشير عنوان القسم، فإن التمييز العام بين نصفي الدماغ الأيمن والأيسر مشابه للتمييز بين الواحد والكثرة. هناك أنواع مختلفة من التضاد بين الواحد والكثرة، وقمت بجمع الطرق المختلفة بواسطة الحقول الأفقية. وفي الجزء الأخير غير المقسَّم، وضعت عبارة «بداية التنوير». وهذه هي النقطة التي نريد الوصول إليها. لكن أولاً دعونا نقرأ الجدول من الأعلى. سنكتشف في القسم «الواحد والكثرة في المنطق ونظرية المجموعة» النصف الأعلى من الجدول. ونكتشف في «التصوف والعقلانية» الصندوق الصغير تحت (التصوف). وسيعطينا القسم «ساتوري» وصفاً يفيد بأن التنوير هو «الفرق» بين الواحد والكثرة.

الواحد والكثرة في المنطق ونظرية المجموعة

كما ذكرنا لأكثر من مرة، يعتقد الرياضي الأفلاطوني بالوجود الموضوعي والخارجي للمجموعات اللانهائية، بينما يعتقد الرياضي الشكلي بأن كل ما لدينا عبارة عن أوصاف نهائية متعددة للنظريات الرياضية. يبدو الحدس على أنه توليفة بين وجهتي النظر هاتين، لكن الواقع أن الحدسي والشكلي على الجانب نفسه، ويعتقدان باللانهاية المحتمَلة فحسب، وليس باللانهاية الفعلية.

في الجدول السابق، وضعت اللانهاية الفعلية في جانب الواحد. لأنه إذا نظرنا إلى مجموعة مثل مجموعة الأعداد الطبيعية N على أنها كائن مفرد محدّد، فإن ذلك يعني التفكير بمجموعة لانهائية فعلية. ومن الناحية الأخرى، إن اعتبار N كثرة لا يمكن إدراكها يعني التعامل معها كلانهاية محتمَلة، أي مجموعة لا يمكن أن تكتمل أبداً.

في الحقل التالي من الجدول، جمعت الحقيقة والأفكار والدلالات والعقول مقابل قابلية الإثبات والكلمات والإعراب والآلات. إن الاختلاف بين الحقيقة وقابلية الإثبات هو ما تؤكده نظرية عدم الاكتمال. فإذا امتلكنا بديهيات صحيحة، سنحصل على عبارات قابلة للإثبات صحيحة. لكن،

بالمقابل، لن تكون جميع العبارات الصحيحة قابلة للإثبات أبداً. لكننا في الوقت ذاته غير قادرين على الاستغناء عن قابلية الإثبات لأننا لا نملك تعريفاً نهائياً لـ «الحقيقة». الحقيقة نوع من **المطلق**، وفكرة مفردة توجّه خياراتنا من البديهيات. الحقيقة هي **الواحد** الذي تحاول **الكثرة** من الإثباتات مقاربتها.

بالانتقال إلى السطر التالي، أشير إلى أن الحقيقة نوع من الفكر لا يمكن التعبير عنه بالكلمات. نعلم جميعاً ما هو التفكير، لكننا ما من طريقة تفسّر كيف نفعله. وكما رأينا في الفصل الثالث، فإنه لا توجد طريقة نهائية تصف بالضبط كيف نحوّل الأفكار إلى كلمات أو العكس. وإذا فكرنا في مجموع التجربة الفكرية البشرية كوحدة، فإن المحاولات المختلفة لوصفها في كلمات تشكّل العديد من المقاربات الجزئية.

يناقش المنطقيون غالباً هذا النوع من الاختلاف على أنه اختلاف بين الدلالة والإعراب. إذا اعتبرنا اللغة نظاماً من الرموز، والذي يصف واقعاً ثابتاً، سيكون لدينا رؤية دلالية للغة. أما إذا اعتبرنا اللغة لعبة تُلعب وفق قواعد معينة، فحينها تكون نظرتنا للغة نظرة إعرابية. مثلاً، لتكن الجملة الرياضية S، إن السؤال «هل S صحيحة في الأكوان الرياضية التي في عقلنا؟» هو سؤال دلالي؛ أما السؤال «هل S قابلة للإثبات بواسطة بديهيات النظام الذي نستخدمه؟» هو سؤال إعرابي. يُدرس هذان النوعان من الأسئلة في فرعين من علم المنطق، تُدعى على التوالي، نظرية النموذج ونظرية البرهان.

في المراحل الأولى من البحث، لا يعمل علماء الرياضيات مثل آلات إثبات النظريات، بل يعتمدون على نوع من الحدس الرياضي لـ «رؤية» الكون الرياضي وتحديد ما هو صحيح من خلال عملية تجريبية. ولكن ذلك لا يكفي بالطبع. بمجرد أن نكتشف حقيقة رياضية، نحاول على الفور إيجاد إثبات لها. وفي المراحل اللاحقة من البحث، يحاول علماء الرياضيات العمل كالآلات عند كتابة برنامج محدد أو إثبات استنتاج لحقيقة مطلوبة.

لا يعني اختياري وضع العقول مقابل الآلات أني مع الأولى ضد الثانية. بل إني أرى كلا الجانبين صالحاً وضرورياً. والنوع الوحيد من التفكير الذي أعارضه بالفعل هو القول إن **الواحد** هو الحقيقة فحسب، أو القول

إن الكثرة هي الحقيقة فحسب. أودّ، من خلال التمييز بين العقل والآلة، أن أوضح اعتقادي بوجود المزيد لندركه، أكثر من العمل البسيط لبعض البرامج الكيميائية الحيوية في الدماغ. ويمكنني أن أزيد على ذلك، بأنه يمكننا التفكير على نحو صوفي وعقلاني في الوقت ذاته. سأناقش الثنائية «صوفي- عقلاني» أدناه، لكني أشير هنا إلى أنني وضعت التصوف والعقل في جانب الواحد، لأني أعتبر أن من السمات المميزة للعقل الواعي الصوفي هي قدرته على تجربة نفسه مباشرة كجزء من المطلق الموحَّد.

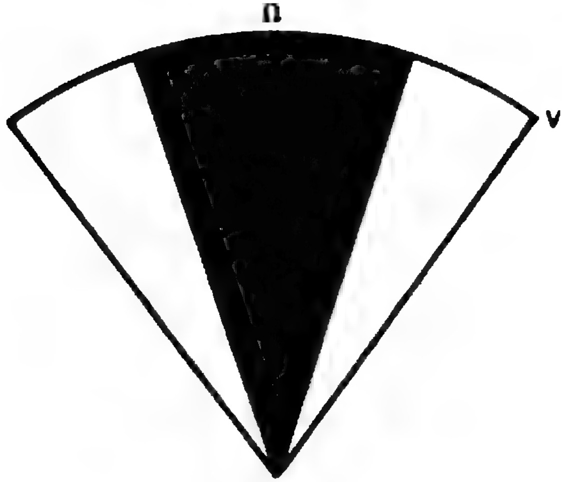
توضّح الثنائية «الأعداد الحقيقية القابلة للتسمية- الأعداد الحقيقية العشوائية» جانباً مختلفاً من علاقة الواحد والكثرة. العدد الحقيقي العشوائي هو تسلسل لانهائي من الأرقام بدون قاعدة توحِّد كتابته. إذاً بهذا المعنى، هو كثرة، وليس واحداً مثل الأعداد الحقيقية القابلة للتسمية والتي يتبع امتدادها العشري قاعدة واحدة ومحددة.

بالطبع، إذا أخذنا عدداً حقيقياً غير قابل للتسمية مثل T (T يرمِّز الحقيقة)، يمكن القول من خلال الحدس العالي إن T واحد، وإن الأسماء المختلفة غير الكافية لتسميته تشكِّل كثرة. ويُظهِر ذلك وجوهاً متعددة للاختلافات الممكنة في شكل الواحد والكثرة.

نجد الالتباس نفسه في سطر الفئة الصحيحة. المجموعة هي وحدة بالتأكيد، أي إنها واحد؛ والفئة الصحيحة هي كثرة لا يمكن التفكير بها كـ«واحد». ومع ذلك، على مستوى أعلى، يمكن القول إن فئة صحيحة مفردة (مثل فئة جميع الأعداد الترتيبية On)، هي واحد تقاربها كثرة من المجموعات المختلفة.

يُظهِر الحقل التالي (V-Ω ، c-$\aleph_1$) اختلافاً عالي المستوى بين الواحد والكثرة. إذا عاملنا فئة كل الأعداد الترتيبية كالعدد المطلق المفرد اللانهائي أوميغا الكبيرة Ω، فيمكننا أن نتساءل عن العلاقة بين أوميغا الكبيرة وفئة كل المجموعات V. من حيث النمو العمودي، يمتد الاثنان إلى أقصى ما يمكن. لكن لنظرية المجموعة وجهة نظر تعتبر أن المجموعات تنشأ من عملية أفقية للنمو خارجاً من عمود الأعداد الترتيبية. إذا حافظنا على النمو الأفقي

بالحدّ الأدنى، سنحصل على «كون غودل L» المؤلَّف من «مجموعات قابلة للإنشاء». لكن الاعتقاد العام هو أن الكون أوسع بكثير من كون غودل. (انظر التدريب الأول).



الشكل 70

أوميغا الكبيرة **واحد**، بمعنى أنها شكل للمفهوم البسيط «اللانهاية»، أما V فهي **كثرة**، بمعنى أنها شكل لمفهوم معقد هو «كل المجموعات».

إذا اقتصرنا بتركيزنا على المجموعات القابلة للعدّ، ستتحول هذه الثنائية إلى ثنائية $\aleph_1$ وc لمشكلة الاستمرارية لكانتور. والسبب أن هناك عدداً c من المجموعات القابلة للعد، وعدداً $\aleph_1$ من المستويات القابلة للعدّ من اللانهاية. لذا فمشكلة الاستمرارية هي شكل من أشكال مشكلة الواحد والكثرة.

الصوفية والعقلانية

التصوف هو شكل متطرف من التوحيد. والتعاليم المركزية للتصوف هي البساطة بذاتها: **الكل واحد**. إن جوهر التقليد الصوفي ليس في الواقع نظاماً فلسفياً خاصاً، بل هو الإدراك الآني لهوية المرء الذاتية مع الإله.

علينا أن نضع في الاعتبار أن لـ «التصوف» معنى دقيق كضفيرة من الفكر

أو نوع من السلوك الموجود منذ آلاف السنين في الشرق والغرب. ولا يجب أن نخلط بين التصوف ومذهب القوى الخفية، الذي يتعلق بالطقوس الغريبة والصيغ السرية. وليس للتصوف علاقة مع التنجيم والكهانة وقراءة الطالع، وتعاطي الأفيون أو الالتزام بالطعام الصحي أو التنبؤ فوق الطبيعي. بل التصوف هو الوعي البسيط للهوية المباشرة للروح الفردية والمطلق.

السمة المميزة للتصوف هي كسر الفروق. لكن من الواضح أن ذلك ليس أمراً جيداً في كل الأحيان. إذا لم أستطع تمييز الفرق بين يدي والشطيرة التي آكلها، فربما أعض يدي. ومقابل النزعة البشرية نحو التصوف نجد العقلانية. لكن المبالغة في العقلانية تجعلها سخيفة ومملة. فالمطلوب إذاً جسر بين الاثنين، وهذا ما سأناقشه في القسم الفرعي التالي.

أود أولاً أن أذكر مثالين عن الفكر الصوفي. يتعلق المثال الأول بالتمييز الذي قدَّمه رودلف أوتو في كتابه «التصوف الشرقي والغربي»[15]. يصف أوتو نوعين مختلفين من التأمل الذي يمارسه الناس من أجل الشعور بالاتحاد مع المطلق: الطريق الداخلي وطريق الوحدة. تتوافق هاتان الطريقتان، على التوالي، مع الاتجاه نحو الوعي باللاشيء، أي الصفر أو العدم «0»؛ والوعي بكل شيء، أي اللانهاية «∞».

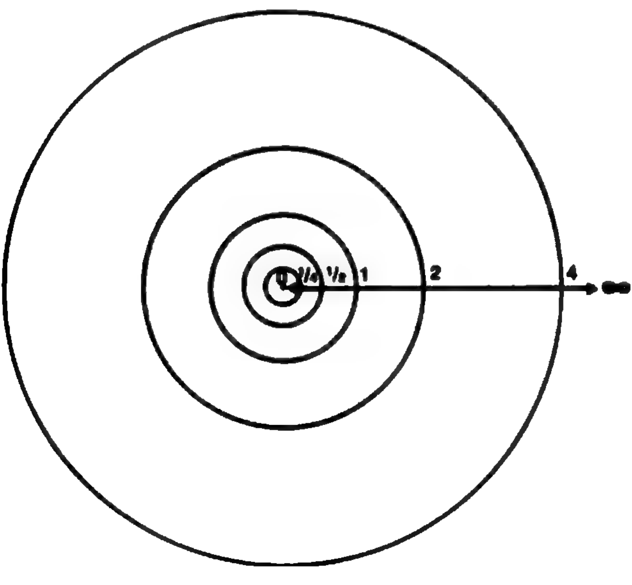
يتضمن الطريق الداخلي محاولة إيقاف انشغال الفكر بالأفكار، والتحرر من سيطرة العواطف، والتوقف عن تعكير مياه العقل. وفيه يسعى المرء للعدم الذي يكمن في كل شيء. تصف الصيغة الهندية هذا الفعل بـ «لا هذا ولا ذاك». يحاول المرء أن يتوقف عن التفكير، ويتوقف عن التفكير بالتوقف عن التفكير، ويتوقف عن... وهكذا. وينجح الأمر أحياناً. أما طريق الوحدة فيحاول تضمين المزيد والمزيد من العالم ضمن مجال وعي المرء. وفيه

15- Rudolf Otto, *Mysticism East and West* (New York: Macmillan, 1960), pp. 57-72. ظهر الكتاب لأول مرة عام 1932. وهو يقوم على نحو أساس على مقارنة بين فكر الكاهن الألماني ميستر إكهرت من القرن الثالث عشر، وفكر المعلم الهندي سانكارا من القرن التاسع. ناقش معلم الزن العظيم دايستز تيتارو سوزوكي فكر إكهرت أيضاً في كتاب *Mysticism: Christian and Buddhist* (Westport, Connecticut: Greenwood, 1976).

يسعى المرء نحو وحدة وجدانية مع كل شيء. ويمكن أن نصيغ هذا الفعل بالعبارة «وهذا أيضاً».

الفكرة الصوفية التي أودّ أن أصفها هنا هي التالية: الطريق إلى الوحدة والطريق الداخلي لهما الهدف نفسه. اللاشيء وكل شيء هما الشيء نفسه.

لنأخذ على سبيل المثال القياس الهندسي. ولنفكر في الوعي العادي كدائرة نصف قطرها 1. يتضمن الطريق الداخلي تقليص مجال الوعي باستمرار، وليكن نهجه في ذلك تقسيمه إلى ما لانهاية. أما طريق الوحدة، فينطوي على توسيع مجال الوعي مراراً وتكراراً، وليكن نهجه هو مضاعفة المجال. إذا أخذنا في الاعتبار «قلب المستوى في الدائرة»، أي اقتران كل نقطة (x،y) بالنقطة ($1/x$،$1/y$)، نجد أن لكل خطوة تقسيمٍ للداخل لدينا خطوة مضاعفة للخارج. ماذا لو اعتبرنا أن 0 و∞ هما المكانُ نفسه؟ يمكن لذلك أن يحدث إذا قمنا أولاً بتقليص المستوى إلى داخل الدائرة، وبعد ذلك قمنا بطي الدائرة على شكل حلقة، كما في قسم «اللانهايات الزمنية».



الشكل 71

إن تعريف الطريق الداخلي مع طريق الوحدة هو مثال على الطريقة التي يكسر فيها التصوف الفروق. في روايتي «دونات الزمكان» أصف شخصاً يختبر التالي:

«ذات مساء بعد يوم جيد في العمل، خرج فيرنور إلى الحديقة خلف المكتبة. كانت توجد شجرة كبيرة هناك، وكان يتسلقها لارتفاع خمسة أمتار تقريباً، متشبثاً بلحائها ورافعاً نفسه للأعلى. بعد أن يصل إلى الأغصان الأولى، يصبح الصعود أسهل، ويتمكن من الوصول إلى غصن مريح يرتفع حوالي خمسة عشر متراً، حيث يرتاح حافي القدمين، مغموراً بشعور من الأمان.

في ذلك المساء، كان المطر يتساقط خفيفاً، لدرجة أنه لم يخترق أوراق الشجرة. جلس في مكانه المريح في حديقة المكتبة، مبتعداً عن المدينة. كان من الممكن سماع الأصوات المختلفة القادمة منها، من أبواق سيارات وصخب وقرقعة، كصوت واحد، صوت المدينة.

لاحظ ثقباً في غصن أعلى من رأسه، فرفع نفسه ليكتشفه. كان خلية نحل. فاحت رائحة مسك برية مع صوت منتظم «ززززز»، ومشت بضع نحلات على حافة الثقب. بدا أنها لم تنزعج من وجود فيرنور، وكان متأكداً أنه يشعرهم بطاقة إيجابية.

هبّ نسيم خفيف أوصل المطر إليه، فانزلق عائداً إلى الغصن الذي كان يرتاح عليه. أغمض عينيه، وبدأ رأسه بالعمل. بدا له أن هناك طريقتين للوصول إلى التنوير؛ إما أن يوسِّع المرء وعيه ليشمل كل شيء، أو أن يجعله يتلاشى إلى لا شيء.

حاول فيرنور القيام بكلا الأمرين في وقت واحد.

من الناحية الأولى، اتجه نحو كل شيء من خلال إطلاق شعوره بالإدراك المكاني ليتوسَّع من رأسه ليشمل جسده كاملاً، ثم الشجرة وخلية النحل، ثم الحديقة، ثم المدينة وسماء الليل. وأطلق وعيه الزمني أيضاً، ليشمل مسارات قطرات المطر، وأفكاره الأخيرة، وطفولته، ونمو الشجرة، وتحولات المجرة.

من الناحية الثانية، اتجه أيضاً إلى اللاشيء بالانقطاع عن تحديد نفسه بأي

جزء من الفضاء على الإطلاق. ووجَّه وعيه الزمني نحو اللاشيء من خلال التخلي عن أفكاره وأحاسيسه الفردية، مقلِّلاً باستمرار انشغاله العقلي.

كانت الصورة الكلية التي تصورها لهذين الفعلين عبارة عن كرتين، إحداهما تتوسع إلى الخارج نحو اللانهاية، والأخرى تنكمش نحو الصفر. تنمو الأولى بمضاعفة حجمها باستمرار، بينما تتقلص الثانية بالانكماش المستمر... وبدا أن الكرتين تفترقان إلى ما لانهاية. ولكن مع الشعور المفاجئ بالحرية والهواء، أصبح لدى فيرنور قناعة بأن الكرتين تتحركان في مجال تصادم مباشر؛ بطريقة ما، ستتوسع الكرة الخارجية وتتقلص الكرة الداخلية إلى أن تجتمعا في نقطة محقَّقة، حيث الصفر هو اللانهاية، حيث اللاشيء هو كل شيء»[16].

إذاً، ربما أمكن للمرء بطريقة ما أن يختبر العدم وكل شيء كأنهما شيء واحد. بالطبع، يمكن لشخص عقلاني أن يرفض تجربة فيرنور ويعتبرها حلماً أو نوعاً من الهلوسة. لا أود أنا أن أرفضها، وبالوقت نفسه لا أدعي أنها صحيحة بالمطلق. أود فحسب أن أوضح ما ينطوي عليه الفكر الصوفي.

لنلقِ نظرة على مثال آخر للميل الصوفي لتحطيم الفروق. في مقال طويل يحمل عنوان «ما هي الحياة»، يخرج الفيزيائي العظيم إيروين شرودنغر بالحجة التالية:

نظراً لأن 1) جسدي يعمل كآلة نقية وفق قوانين الطبيعة، و2) أعرف من خلال التجربة المباشرة أني أقوم بتوجيه حركات جسدي، فإن ذلك يؤدي إلى 3) أنا الذي أوجه ذرات العالم في حركاتها.

ويلاحظ شرودنغر، «من الجرأة أن تعطي هذا الاستنتاج الصيغة البسيطة الذي يتطلبها. إذا قلت في المصطلحات المسيحية «لذلك أنا الإله»، فإنك تبدو مجدِّفاً ومجنوناً»[17].

16- الفصل الخامس من:
Rudy Rucker, *Spacetime Donuts* (New York: Ace Books, 1981).

17- Erwin Schrödinger, *What is Life? & Mind and Matter* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1969), p. 93.

لكن شرودنغر يدافع عن هذا الاستنتاج، مشيراً إلى أنه مثال على المعادلة الأساسية للأوبنشاد: أتمان هو براهمان. أتمان، التي ترتبط بالكلمة الألمانية التي تعني النَّفَس، هي الكلمة السنسكريتية للروح الفردية. وبالمعنى الموصوف سابقاً في قسم «وعي الروبوت»، فإن أتمان الفرد هو إحساسه بـ «أنا أكون». أما براهمان، فيشابه ما نقصده بالمطلق، الأبدي، كل ما هو موجود في العالم.

على المنوال نفسه، تأمل الفقرة الشهيرة من العهد القديم، خروج 3، 13-14:

فَقَالَ مُوسَى للهِ: «هَا أَنَا آتِي إِلَى بَنِي إِسْرَائِيلَ وَأَقُولُ لَهُمْ: إِلهُ آبَائِكُمْ أَرْسَلَنِي إِلَيْكُمْ. فَإِذَا قَالُوا لِي: مَا اسْمُهُ؟ فَمَاذَا أَقُولُ لَهُمْ؟»، فَقَالَ اللهُ لِمُوسَى: «أَكُونُ من أَكُونُ». وَقَالَ: «هكَذَا تَقُولُ لِبَنِي إِسْرَائِيلَ: أَكُونُ أَرْسَلَنِي إِلَيْكُمْ».

ما هو اسم الإله؟ إنه «أكون».

هذه الأفكار الصوفية صحيحة بالتأكيد على مستوى واحد. ولكن على مستوى آخر، على المستوى العقلاني، هي ليست صحيحة على الإطلاق. أنا لست الإله. أنا بشري فانٍ ضئيل أعيش فترة من الزمن. كيف يمكن أن يكون كلا الشيئين صحيحين معاً؟ كيف لي أن أكون أنا الواحد، أنا أكون، أنا المطلق... ومع ذلك أكون مجرد وجه في الزحام، فرد واحد بين كثرة آخرين؟

لحظة التنوير (ساتوري)

يُعتبر دي تي سوزوكي أكثر من كتبوا بلاغة عن فلسفة الزن. أود أن أبدأ هذا القسم بوصف ذكره في مقاله «معنى الساتوري»[18].

يميِّز سوزوكي بين طريقتين لمعرفة العالم. الأولى هي «برانا»، وهي المعرفة البديهية والفورية للعالم، أو ما يمكن أن نسميه الاستيعاب الصوفي للعالم في وحدته. والسمة المميزة للمعرفة عن طريق «برانا» هي أنها تتجنب

D. T. Suzuki, *The Field of Zen* (New York: Harper & Row, 1970), pp. 18–21–27.

التمييز بين العارف والمعروف، بين الفاعل والمفعول. ومعرفة «برانا» لا تُعلَّم، بل تُنقل نقلاً من أحد لآخر.

الطريقة الثانية هي «فينانا» وهي موضوعية، أو معرفة تحليلية للعالم، والتي نسميها «التفكير المنطقي». تقف «فينانا» منفصلة عن الشيء المعروف، فالكائن المدروس هو كائن خارجي. يمكن لـ «فينانا» أن تُكتب وتُعلَّم. ويقول سوزوكي في ذلك قولاً سديداً:

«لا تصل «فينانا» إلى اللانهاية أبداً. عندما نكتب الأعداد 1، 2، 3، إلخ، لا نصل إلى نهاية أبداً، لأن السلسلة تمضي إلى اللانهاية. نحن نحاول أن نضيف كل هذه الأعداد إلى بعضها البعض لنصل إلى كلية الأعداد، لكن الوصول إلى هذه الكلية أمر مُحال. «برانا» هي الطريقة الأخرى، إنها الاستيعاب البديهي لهذه الكلية بدلاً من التحرك خطوة خطوة، عدداً إثر عدد؛ إنها استيعاب الأشياء ككل. إنها لا تلجأ إلى التمييز، بل تستوعب الواقع من الداخل، إذا جاز التعبير»[19].

ليس الأمر أن الطريق الصوفي البديهي للمعرفة هو الأفضل. كلا الطريقين حقيقيان، وكلاهما مهمان. لكن من الصعب –وربما كان مستحيلاً– لنا أن نرى العالم من خلال الطريقتين معاً في الوقت نفسه. فنحن نرى العالم في اللحظة الواحدة إما واحداً أو كثرة.

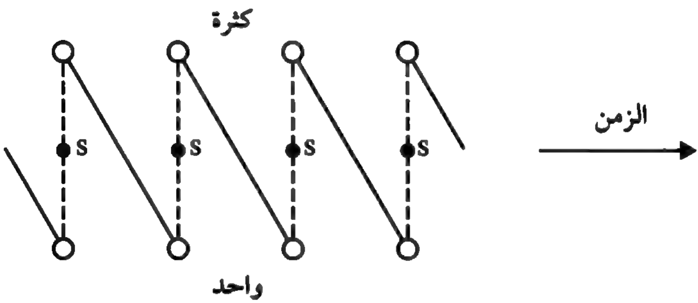
يبدو الانتقال من الكثرة إلى الواحد أمراً تدريجياً، نوعاً من التهدئة المقصودة يقوم به العقل. لكن الانتقال المعاكس، من الواحد إلى الكثرة، أمر يحدث فجأة. في لحظة ما، قد تكون في حالة وحدة كاملة مع العالم. وفي لحظة أخرى، قد تجد نفسك تتحدث عن هذه التجربة، تقف خارج ذاتك، وتصنع فرقاً. إن الأمر الصعب هو القبض على اللحظة التي تكون فيها في الحالة بين الواحد والكثرة، والتي دعوتها سابقاً «الفرق» في قسم «مشكلة الواحد والكثرة». وفقاً لسوزوكي، فإن هذه اللحظة هي التنوير

19– D. T. Suzuki, *The Field of Zen* (New York: Harper & Row, 1970), p. 22.

الذي يُعرف بساتوري. «إن اللحظة التي تقسم فيها الكلية نفسها إلى فاعل ومفعول، وتحافظ في الوقت نفسه على وحدتها، هذه اللحظة بالذات هي استيقاظ الوعي- هذا هو ساتوري»[20].

هذا النوع من ساتوري هو لحظة عابرة، لكنها ليست نادرة. يمكن أن نقول إن إيقاع التفكير الطبيعي هو تذبذب بين الواحد والكثرة. بينما تنظر في أرجاء الغرفة، تمرّ بلحظات متناهية في الصغر من الانتباه. أنت تتواصل مع العالم وتندمج به مرة، ثم تعود إلى التحليل مرة أخرى. في لحظة ترى الوجود كله شيئاً واحداً، وفي لحظة أخرى تكون شخصاً يصنّف تصوراته. واحد-كثرة -واحد-كثرة-.... ربما بمعدل ثلاث دورات في الثانية.

يشبه ذلك الرسم في الشكل 72، الذي يشير إلى الغرق مراراً وتكراراً في اتحاد هادئ مع الواحد، ثم العودة إلى الوعي العقلاني العادي. يمكن للنقاط المسمَّاة «S» أن تكون نقاط ساتوري.

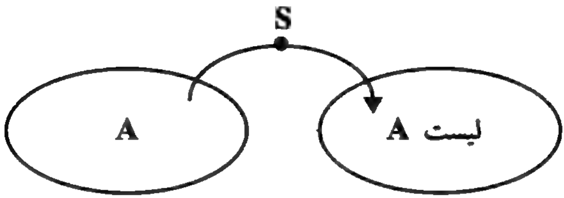


الشكل 72

يمكن للاستيقاظ كل صباح أن يكون لحظة ساتوري؛ ففي اليوم الذي يستيقظ فيه المرء على نحو طبيعي (بدون ساعة منبِّه)، يبدو له أنه يطفو من النوم ليصل إلى حالة من الشيء الواحد، بدون أن يفكر حتى بمن هو أو أين هو. لكن تلك الحالة الرائعة لا تدوم طويلاً... بمرور ثوان سيجد نفسه بدأ بالتفكير بأفكار متعددة. لكن هل من الممكن أن نلاحظ نقطة التحول؟

20- D. T. Suzuki, *The Field of Zen* (New York: Harper & Row, 1970), p. 24.

أرى ساتوري أنه «باب التنوير». ليس من الضروري أن يكون الباب بين الواحد والكثرة، بل يمكن أن يكون بين أي قضية «A» ونفيها «ليست A». وكما ذكرنا في السابق، كقاعدة عامة، لا يمكن التفكير في كلا الأمرين (القضية ونفيها) في الوقت ذاته. لكننا نغيِّر عقولنا، ونتنقل بين مجموعة متنوعة للغاية من الحالات العقلية غير المتوافقة. وتحدث هذه التنقلات على نحو مفاجئ، مثل القفزات الحادة. وفي بعض الأحيان، عندما نقفز، نلقي نظرة خاطفة ونرى بدون تحيّز، وبتسامح مطلق، القضية ونفيها كمنطقتين مختلفتين من فضاء العقل نفسه.



الشكل 73

كتب بنجامين بول بلود بشيء من التفصيل عن هذه التجربة[21]. كان يمسك بمنديل مليء بسائل منوِّم ويضعه على وجهه، ويغرق في حالة من فقدان الوعي. وما إن تسقط يده الخدِرة بعيداً عن وجهه حتى يستيقظ. جعلت هذه التجربة من الانتقال المفاجئ بين الغيبوبة المُصطنَعة والوعي العادي من بنجامين كوسيط يمكنه وصف الحالة، ونقرأ شيئاً مثيراً للاهتمام في كتبه حول ذلك:

«أعتقد أن معظم من سيقومون بالتجربة سيقبلون التالي على أنه النقطة المركزية للتنوير:

1) ليست العقلانية النوع الأساس للذكاء، بل هو مجرد حالة متغيرة مثل صرير عجلة، يرتفع صوتها وينخفض أثناء دورانها.

21– انظر الهامش (4).

2) في العقلانية فحسب نجد الأفكار الشكلية أو المتناقضة، في حين أن الحياة المجرَّدة لا تتحقق إلا خارج العقل تماماً.

3) إن التناقض الآني بين «ماء الروح الصافي» مع الأفكار الشكلية عندما «نصل»، هو ما يترك المتأمل في دهشة من أن سرّ الحياة الرهيب ما هو إلا شيء بسيط وعادي. وبصرف النظر عن الشكلية المجرَّدة، فالمهيب والسخيف يملكان الكرامة نفسها»[22].

بنجامين بول بلود

حتى الآن، كنت أصف الباب بين الواحد والكثرة على أنه شيء يمكن للمرء أن يتحرك خلاله ذهاباً وإياباً. لكن ذلك مضلّل بعض الشيء. وبكلمات سوزوكي، «ليست ساتوري تجربة خاصة مثل التجارب الأخرى في حياتنا

22- Benjamin Paul Blood, «The Anaesthetic Revelation and the Gist of Philosophy», (Privately printed in Amsterdam, New York, 1874), p. 34. أثّر هذا الاقتباس فيَّ كثيراً، لدرجة أني وضعته في روايتي *White Light* (p. 221، لأفصل بين مشهد يندمج فيه البطل مع الضوء الأبيض، أي المطلق، عن المشهد الذي يليه، وفيه يعود البطل إلى حياته الطبيعية في شقته الصغيرة في نيويورك. كما يمكن العثور على اقتباس مشابه في: William James, *The Varieties of Religious Experience* (New York: Macmillan, 1961), pp. 306–307.

اليومية. فالتجارب المعينة هي تجارب لأحداث معينة، بينما ساتوري هي تجربة تمر عبر جميع التجارب»[23] وكما ذكرنا في السابق، يجري الواحد والكثرة في كل كلمة منطوقة.

من ناحية، لديك واقع نقي غير متمايز، الإله فيك؛ ومن ناحية أخرى، لديك يدك، التي يمكنك تمييزها عن قدمك، أو عن جزرة. العالم واحد وكثرة في آن معاً. لا أقصد أن أقول إنهما الشيء ذاته، ولا يمكنني القول إنهما مختلفان... فتأكيد أي من هاتين الموقفين يبدأ جدلاً لا نهاية له.

يمكن توضيح الجدال على النحو التالي. لنتخيل شخصاً يفكر بطريقة صوفية، يقول «الواحد والكثرة هما الشيء ذاته»، وشخصاً آخر يفكر بطريقة عقلانية، يقول «الواحد والكثرة مختلفان جوهرياً». يمكن أن نمثِّل الوضع الأول بالرقم 1 (شيء واحد فقط)، والثاني بالرقم 2 (شيئان مختلفان). يبدأ الجدال بقول الصوفي للعقلاني: «الواحد والكثرة هما الشيء ذاته». (1=2). فيجيبه العقلاني: «لا، ليسا الشيء ذاته. إن حقيقة اختلافنا في الرأي تثبت أنهما مختلفان». (1≠2). يقاوم الصوفي قائلاً: «لكن اتفاقنا واختلافنا هما في الحقيقة جانبان من العقل ذاته». إذاً (1=2) = (1≠2). يجيب العقلاني: «لا يا صديقي، ليسا كذلك». (1=2) ≠ (1≠2)... وهكذا. ربما من الأفضل ألا نبدأ هذا الجدال وأن نبقى صامتين (كما لو كنا في نقطة ساتوري)! لكن الصمت ممل.

في لغة ميكانيك الكم، نتحدث عن الواحد والكثرة كجوانب متكاملة ينفي بعضها بعضاً في الواقع.

«في الواقع، نحن هنا لا نتعامل مع تناقض، بل مع صور للظواهر تكمل بعضها البعض، والتي تقدِّم، مع بعضها البعض فحسب، تعميماً طبيعياً للوضع الكلاسيكي للوصف... يحمل التكامل تشابهاً عميقاً للصعوبة العامة في تكوين الأفكار الإنسانية، والمتأصلة في التمييز بين الفاعل والمفعول»[24].

23- Benjamin Paul Blood, «The Anaesthetic Revelation and the Gist of Philosophy», (Privately printed in Amsterdam, New York, 1874), p. 23.

24- من المثير للاهتمام أن نجد أشكالًا متعددة من مسألة الواحد والكثرة في ميكانيك الكم. وإحدى أكثر المعضلات الفلسفية صعوبة هي التمييز بين المراقِب والنظام المراقَب. يشير نيلز بور إلى هذه الصعوبة بالمثال التالي: إذا استعان شخص ما

العالم واحد. والعالم كثرة. وهذا الصدع هو ضربات قلب الكون؛ التوتر المشحون الذي يجعل الأشياء تحدث.

ما علاقة كل ذلك بالمناقشات السابقة حول المنطق ونظرية المجموعة؟ توجد نقطتان رئيستان سنذكرهما، تتعلق كلاهما بالعلاقة التكافلية بين الفلسفة الحديثة الدقيقة والرؤية التقليدية للفلسفة على أنها البحث عن الحقيقة المطلقة.

أولاً، من المهم أن ندرك أن أسئلة تقليدية مثل «هل بإمكاننا أن نعرف المطلق؟»، «هل الواقع واحد أم كثرة؟»، أو «ما هي الحقيقة؟»، هي أسئلة حقيقية يمكن أن نبحث عن إجاباتها الدقيقة. كان التأثير المؤسف للوضعية المنطقية المبكرة أن الفلاسفة المحترفين ظلوا لسنوات عديدة يميلون إلى رفض الأسئلة الماورائية اللانهائية باعتبارها صوفية في أحسن الأحوال، ولا معنى لها في أسوأ الأحوال. آمل أن تقنع الأمثلة العديدة التي قدمتُها عن إجابات ما وراء الرياضيات لـ «الأسئلة الكبيرة» الأشخاصَ الأكثر تشككاً في أن هذه الأسئلة لا معنى لها، بل وأن بإمكانها أن تقود إلى فلسفة رياضية من أعلى الدرجات.

ثانياً، أعتقد أن حلول التصوف والتنوير الماورائية التقليدية للأسئلة الكبرى، يمكن أن تحمل قيمة للمفكر الذي يواجه تناقضاً ما أو آخر من النوع الذي ينشأ في المنطق الحديث ونظرية المجموعة. في النهاية، إن الشخص الذي «يشعر» بما قد يكون حلاً لمشكلة ما، يمكنه هو فحسب، أن يطوِّر اللغة لوصف خطوة أبعد في الاتجاه الصحيح لحل هذه المشكلة.

بعصا للسير في غرفة مظلمة، فسيبدو الشعور أولاً أن العصا شيء خارج الشخص، (جزء من النظام). لكن مع تحريك الشخص العصا أثناء سيره في الغرفة، ستبدو كأنها امتداد لذراعه، (جزء من المراقِب). يمكن أن نجد ذلك في Niels Bohr, *Atomic Theory and the Description of Nature* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1934), pp. 56–91.

يمكن النظر إلى «انهيار الدالة الموجية» الشهير في ميكانيك الكم على أنه ممر من الواحد كحالة التطور السببي في الفضاء الفائق، إلى الاختيار بين كثرة من الخيوط المختلفة لحقائق منتهية. كتبت قصة حول هذا الموضوع: Rucker, «Schrödinger's Cat», *Analog* (March 30, 1981), pp. 70–84.

ألغاز ومفارقات الفصل الخامس

1. يُنظر إلى الشكل الأفلاطوني أحياناً على أنه **الواحد** الكامن في كثرة من النماذج التي تملك أموراً مشتركة. في حوار بارمينيدس [123]، يذكر أفلاطون أن ذلك يؤدي إلى نكوص لانهائي[25]. كل الأشياء الكبيرة تشترك في أمر ما، لنقل في شكل الكِبَر. لكن الآن، كل شيء كبير يتشارك مع شكل الكِبَر أيضاً، لنقل في... أكمل هذه الحجة، وقارن ذلك بالطريقة التي يؤدي بها تشكيل مجموعة من المجموعات في وحدة محددة إلى أن يكون كون نظرية المجموعة ليس الكون الكامل، بل مجموعة أخرى فحسب.

2. توجد مشكلة الواحد والكثرة في الفيزياء أيضاً. إذا كان الكون موجوداً كسلسلة من «اللحظات الآنية»، فإن الزمكان كثرة. ولكن إذا أكدنا أن مرور الزمن محض وهم، عندها سيكون الزمكان **واحداً**. لكن ماذا لو وُجد العديد من الزمكانات الموازية؟ هل من طريقة للنظر إلى هذه العوالم المتوازية على أنها واحد، كجوانب من فضاء فائق؟ وهل يمكن أن يوجد كثرة من الفضاءات الفائقة؟

3. اقترح جان فون نيومان تمثيل الأعداد الترتيبية بمجموعات، حيث يُمثَّل كل عدد ترتيبي بمجموعة تضمّ كل الأعداد الترتيبية الأصغر منه، أي لكل عدد ترتيبي a مجموعة $a` = \{b` : b$ عدد ترتيبي أقل من $a\}$. وهكذا،

25- Plato, *The Dialogues of Plato, Vol. 2,* Parmenides 132, pp. 92-93.
انظر أيضاً الفصل الثاني من: John Passmore, *Philosophical Reasoning* (New York: Basic Books, 1969). وأيضاً مناقشة حجة أرسطو «الرجل الثالث» في: Jorge Luis Borges, *Labyrinths* (New York: New Directions, 1962).

على سبيل المثال، نمثّل العدد 3 بالمجموعة `3 = {`0، `1، `2}. أما بالنسبة للمجموعات النقية، فإن `0 هي { }، و `1 = {`0} = {{ }}. اكتب `3 و `4 كمجموعات نقية.

4. في نظرية المجموعة، يُمثَّل زوج الأعـداد الترتيبية <a، b> للمجموعتين a وb بالمجموعة {{a}، {a، b}}. إذا كانت المجموعتان موجودتين في V_n، فما هو العدد الأول m الموجود في <a، b>؟

يُمثَّل العدد العقلاني q عادة كمجموعة من الأزواج المرتبة <`m، `n>، حيث تتناسب m وn مع بعضهما البعض بنسبة تساوي q. فتكون المجموعة {<2، 3>، <4، 6>، <6، 9>، ...}. السؤال هو، في أي V_a توجد الأعداد المنطقية أولاً؟

يُمثَّل العدد الحقيقي r بالزوج الترتيبي <U، L>، حيث U تساوي مجموعة كل «تمثيلات» الأعداد المنطقية الأقل أو تساوي r، وL تساوي مجموعة كل «الأعداد المنطقية» الأكبر من r. في أي V_a يمكن أن نعثر على هذه المجموعات؟

5. تتعامل العديد من قصص الزن مع صعوبة التعبير عن موقف ليس صحيحاً ولا خطأً. كيف يمكنك أن تجيب المعلم في هذه القصة: «رفع المعلم عصاه القصيرة إلى الأعلى وقال: «إذا قلت عن هذه العصا إنها قصيرة، فأنت تعارض الواقع. وإذا لم تقل إنها قصيرة، فأنت تتجاهل الحقيقة. والآن، ما الذي يُقال عنها برأيك؟»[26].

أجوبة ألغاز الفصل الخامس

1. يمكن القول إن ما تشترك به عدة أشكال كبيرة مختلفة مع شكل الكِبَر هو أن جميعها أمثلة لمفهوم مستمر من الضخامة. ويمكن أن يستمر ذلك إلى ما لانهاية، تماماً كما في نكوص برادلي الذي وصفناه في قسم «ما هي الحقيقة؟». ويبدو أن مصدر الصعوبة يكمن في أن أي شكل محدّد ومسمًّى سيكون أصغر من أن يلتقط المفهوم الموسَّع والمُدرَك بالحدس والذي يجب تجسيده. تمتنع

26- Gyomay Kubose, *Zen Koans* (Chicago: Henry Regnery, 1973), p. 5.

المفاهيم الشاملة عن إمكانية التعامل معها كأشياء محدودة يمكن التحكم بها. وبالنسبة للمجموعة، فلدينا مفهوم بدائي لما يمكن أن تعنيه، لكن ما إن نحاول تجميد هذا المفهوم في «مجموعة كل المجموعات»، سنحصل على مجموعة كبيرة وقابلة للتجاوز فحسب. لا يعني ذلك عدم وجود فئة كل المجموعات، أو عدم وجود شكل أكبر، بل يعني أن هذه الفئات والأشكال هي في الأساس وراء الفهم العقلاني. وفي الفلسفة الرياضية، نصف هذا الموقف بالقول إن هذه المفاهيم الكبيرة تُعرف بـ «صورة مكثَّفة»، لكن ليس بـ «صورة واسعة». ومعرفة مجموع بـ«صورة مكثَّفة» يعني أن نعرف معيار العناصر فيه. أما بـ «صورة واسعة»، فيعني أن نتمكن من تصورها بالكامل.

2. إذا كانت كل الأكوان المحتمَلة -والتي يجب أن تكون موجودة، على الأقل كاحتمالات مُرمَّزة في كون نظرية المجموعة V- فمن الصعب حينها فهمها كـ «**واحد**». لكن يمكننا أن نحاول، كما فعل جون ويلر في كتابه «الجاذبية»[27]. تكمن الفكرة بافتراض وجود فضاء فائق ذي رتبة أعلى، يتم فيه تمثيل كل كون محتمَل كنقطة. إذا امتلك العالم درجة تبلغ ألِف–واحد من الحرية، عندها سيكون الفضاء الفائق ذا أبعاد لانهائية وقابلة للوصف. أما إذا كانت حرية العالم على نحو استمراري، فسيكون الفضاء الفائق ذا أبعاد لانهائية وغير قابلة للوصف. والفكرة أن نعتبر كل بُعد يتوافق مع أحد الخيارات التي يجب أن تُتخذ لتكوين زمكان محتمَل.

تخيلنا إلى الآن نوعين من الفضاءات الفائقة. ويمكننا أن نواصل التفكير في العديد من الأنواع الأخرى؛ في الحقيقة، يمكننا التفكير في عدد لانهائي مطلق منها. يمكن أن يوجد فضاء فائق لا تملك فيه أي من الأكوان جاذبية. أو فضاء فائق يبلغ طول كل فترة زمنية في جميع أكوانه عامين ونصف. أو... وهكذا. وكل من هذه الفضاءات الفائقة هو نقطة في فضاء فائق أعظمي كبير ككِبَر فئة كل المجموعات.

27- *Gravitation* by Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler.

3. $3'=\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}$

$4'=\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}\}$

نلاحظ تشابه هذه الأنماط مع أنماط بالون التفكير الموضحة في قسم «اللانهاية المطلقة» في الفصل الأول.

4. إذا كانت a وb في V_n، فإن $\{a\}$ و$\{b\}$ مجموعات فرعية في V_n وأيضاً في V_{n+1}. أصبح لدينا $\{\{a\},\{a,b\}\}$ مجموعات فرعية في V_{n+1}، وعناصر في V_{n+2}. إن كل زوج في المجموعة يمثِّل عدداً منطقياً يوجد في V_ω. والمجموعة التي تضمّ كل هذه المجموعات هي $V_{\omega+1}$. لذا يمكننا القول إن الأعداد المنطقية تقع في $V_{\omega+1}$. ولأن مجموعة الأعداد المنطقية هي مجموعة فرعية من $V_{\omega+1}$، لذا فهي عنصر في $V_{\omega+2}$.

نعرف من القسم الأول من هذا السؤال أنه إذا كان U وL تقع في $V_{\omega+2}$، فإن الزوج الترتيبي $\langle U, L\rangle$ سيظهر في الفئة الأعلى بدرجتين، وهي $V_{\omega+4}$. لذا يمكن القول إن التمثيل القياسي للأعداد الحقيقية يظهر أولاً في المجموعة $V_{\omega+4}$.

5. «تقدَّم أحد التلاميذ وأخذ العصا من المعلم وكسرها إلى نصفين، هاتفاً: «ما هذا؟»[28].

بالطبع قد يجد أحدكم طريقته الخاصة لحلّ هذه المسألة، والتي هي وجه من أوجه مسألة الواحد والكثرة. وذلك لأن اعتبارنا أن العصا قصيرة يعني أن نفصلها عن الواقع، بمعنى أن نعارض الاتحاد الأساس للجزء القصير مع الواحد. ومن ناحية أخرى، إذا قلنا إن العصا طويلة، فنحن ننكر التحليل العقلاني للعالم إلى الأجزاء التي تجعل الكثرة وجودها ممكناً.

28- *An Introduction to Zen Buddhims* by D.T. Suzuki.

جورج كانتور

التدريب الأول

الأعداد الأصلية فوق المنتهية

في هذه الرحلة الرياضية، سنقوم بجولة مفصَّلة في عالم الأعداد الأصلية فوق المنتهية. يصف القسم الأول النقاش حول وجود اللانهاية المطلقة، ومبدأ الانعكاس، للوصول إلى وجود الأعداد اللانهائية. ويصف القسم الثاني كيف نتعامل مع هذه الأعداد اللانهائية.

في قسم «الاستمرارية»، ندرس عدداً من المجموعات التي عدد عناصرها c، وهو يمثِّل مجموعة نقاط على مستقيم الأعداد الرياضي؛ ثم نناقش السؤال الصعب عن مكان c في التسلسل الهرمي للألِفات.

في قسم «الأعداد الأصلية الكبيرة»، نقدِّم شيئاً جديداً: سرداً شعبياً للنظرية الحديثة للأعداد اللانهائية الكبيرة للغاية.

ألِف–واحد والمجموعة On

ذكرت في قسم «من الفيثاغورية إلى الكانتورية» وفي الفصل الخامس، أنه يمكن تمثيل كل الكائنات الرياضية كمجموعات. كيف لنا أن نمثِّل الأعداد الأصلية كمجموعات؟

الحل بسيط، لكنه خفي. يُحدد العدد الترتيبي a بالمجموعة $\{a > b : b\}$ لكل الأعداد الترتيبية الأصغر من a. وهكذا فإن $0 = \{0 > b : b\} = Ø$،

$$1 = \{b : b < 1\} = \{0\} = \{Ø\}$$

$$2 = \{0, 1\} = \{\varphi, \{\varphi\}\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{\varphi, \{\varphi\}, \{\varphi, \{\varphi\}\}\}$$

$$\omega = \{0, 1, 2, ...\}$$

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, ... \omega\}$$

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, ... \omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\}$$

$$\omega^2 = \{0, 1, 2, ... \omega, \omega + 1, ... \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, ... \omega \cdot 3, ...\}$$

يذكرنا ذلك بالعملية الموضحة في الشكل 29، حيث يصل ويلي إلى المستوى ω. ونلاحظ أن استخدام نقاط التلاشي في الرسم يساعد في احتواء بالون التفكير اللامتناهي في إطار محدود. وإذا فكر ويلي في كل الأفكار في لحظة واحدة، سيكون عند المستوى ω+1.

إن تعريف الأعداد الترتيبية بمجموعات يجعل الأمور ملائمة أكثر. بالنظر إلى أن $b < a$+1 إذا وفقط إذا كانت b أصغر أو تساوي a، فيمكننا استنتاج تمثيل a+1 من تمثيل a، فإذا كانت a هي من الشكل {0، 1...، ...، ...}، فإن a+1 من الشكل {0، 1...، ...، ...، a...}. وبعبارة أخرى، a+1 = a U {a}.

إذا كانت $lim(a_n) = a$، فإن b أصغر من a إذا وفقط إذا كانت b أصغر من أحد قيم a.

إن التضمين الأول يكون صحيحاً طالما a هي أقل عدد ترتيبي أكبر من جميع قيم a_n؛ ويبقى التضمين المعكوس صحيحاً طالما a أكبر من كل قيم a_n.

لذا نجد أن $a = \{b : b < a\} = \{b : b < a_n$ لإحدى قيم $n\} = \{b : b < a_0\}$ $U \{b : b < a_1\}\ U \{b : b < a_2\}\ U \{b : b < a_3\} \ldots = a_0\ U\ a_1\ U\ a_2\ U \ldots$ $= U_n\ a_n$. وهكذا نجد أننا نحصل على $lim(a_n)$ باجتماع كل مجموعات a_n.

يمكن تطبيق هذه الطريقة على أي مجموعة من الأعداد الترتيبية، بغضّ النظر عما إذا كانت المجموعة قابلة للترتيب في تسلسل من الأعداد الطبيعية المتزايدة. في ضوء هذه الحقيقة، سنعتمد رمزاً جديداً هو sup$A$، والذي يمثّل أول عدد ترتيبي أكبر من أي من عناصر المجموعة A. ويمكننا القول ببساطة إن sup$A$ هي أكبر عنصر في مضافاً إليه 1؛ من ناحية أخرى، هي نتيجة اتحاد جميع عناصر A.

كما هو الحال في «الألِفات»، نقول عن مجموعتين S وT أن لهما عدد العناصر نفسه إذا وفقط إذا أمكن ربط كل عنصر من T بعنصر واحد من S. وتُكتب هذه العلاقة على النحو $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{T}}$. ويمكن التعبير عنها أيضاً بالقول إنه يمكن تحويل S إلى T بمجرد تبديل عناصر الأولى بعناصر الثانية واحداً تلو الآخر.

إن لعدد عناصر مجموعة ما أهمية كبيرة؛ فمن ناحية، لا تمتلك جميع المجموعات اللانهائية عدد العناصر نفسه؛ ومن ناحية أخرى، تمتلك مجموعات لانهائية عديدة عدد العناصر نفسه مع أنها تبدو مختلفة. على سبيل المثال، ω و2 .ω عددان ترتيبيان مختلفان تماماً، لكنهما يمتلكان عدد العناصر نفسه كما ذكرنا في قسم «الألِف». $\overline{\overline{\omega + \omega}} = \overline{\overline{\omega}}$.

عموماً، نقول إن المجموعة S قابلة للعد إذا وفقط إذا كان عدد عناصرها أقل أو يساوي عدد عناصر أوميغا ω. أي إذا كانت S فارغة، أو منتهية، أو $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{\omega}}$. (بالمناسبة، تُستخدم العبارة المنطقية «إذا وفقط إذا» أيضاً للتعبير عن مساواة منطقية، كما في قولنا «P إذا وفقط إذا Q»).

أحد أهدافي في هذا القسم هو تبرير وجود العدد الترتيبي أَلِف–واحد $\aleph_1$ غير القابل للعد.

في قسم «من أوميغا إلى إبسيلون–صفر»، استخدمنا مبدأين لتوليد الأعداد الترتيبية:

1) يوجد لكل عدد ترتيبي a عدد ترتيبي أكبر منه هو $a+1$.

2) يوجد لكل متتالية متزايدة من الأعداد الترتيبية عدد ترتيبي أكبر من كل عناصر المتتالية a_n، هو نهاية المتتالية $lim(a_n)$.

توجد حقيقة مختبئة في المبدأ الأول. وهي أنه ما من عدد ترتيبي أقل من نفسه. فإذا وُجد عدد ترتيبي كهذا، لن يكون هناك عدد أول أكبر منه، بل سنجد دائماً أنه قبل أي عدد أكبر منه يوجد العدد نفسه.

يمكن الآن دمج المبدأين الأول والثاني لتشكيل المبدأ الثالث القوي التالي:

3) يوجد لكل مجموعة من الأعداد الترتيبية A، عدد ترتيبي أول أكبر من كل عنصر في A، وهو $\sup A$.

لا يحمل هذا المبدأ معنى قبل أن نحدّد أي نوع من المجموعات توجد. المبدأ الأساس لوجود المجموعة هو أن التراكم سيكون مجموعة ما لم يمنع ذلك سبب ما.

كما ذكرنا في الفصل الخامس، إن فئة راسل $R=\{x:x\notin x\}$، وهي فئة جميع المجموعات التي ليست عناصر في نفسها، لا يمكن أن تكون مجموعة. والسبب في ذلك أنه إذا كانت R مجموعة سنقع في المفارقة بأنها تحوي نفسها كعنصر إذا وفقط إذا لم تحتوِ نفسها كعنصر! مرة أخرى، إذا افترضنا كالمعتاد أنه لا توجد مجموعة x تضمّ ذاتها كعنصر، عندها تكون فئة كل المجموعات V ليست مجموعة، فلو كانت مجموعة كانت ستحوي ذاتها كعنصر، $V\in V$.

لتكن On هي تراكم كل الأعداد الترتيبية. إذا كانت On مجموعة، عندها ووفق المبدأ الثالث يوجد عدد ترتيبي أوميغا الكبيرة هو $\sup On$. لكن ذلك مستحيل، لأنه إذا كانت أوميغا الكبيرة عدداً ترتيبياً، عندها ستكون عنصراً

من On، أي إن أوميغا الكبيرة أصغر من $\sup On$ وتساوي أوميغا. لكن كما رأينا أعلاه، لا يمكن لأي عدد ترتيبي أن يكون أصغر من نفسه.

إذاً، يؤدي الافتراض بأن «On مجموعة» إلى تناقض بأن أوميغا الكبيرة التي تساوي $\sup On$ هي أصغر من نفسها. اكتشف هذه الحقيقة عالم الرياضيات «سيزار بورالي فورتي» عام 1897، واكتشفها قبله كانتور. ومع ذلك، لدينا مفهوم يجمع كل الأعداد الترتيبية، وفي بعض الأحيان نستخدم الرمز On للإشارة إلى هذا المفهوم عندما نتناوله كتعددية، والرمز أوميغا الكبيرة للإشارة إليه عندما نتناوله كوحدة. نلاحظ أن $On = \{a : a < \Omega\}$، أي إنه وفق التعريف أعلاه، تبدو On و Ω الشيء ذاته.

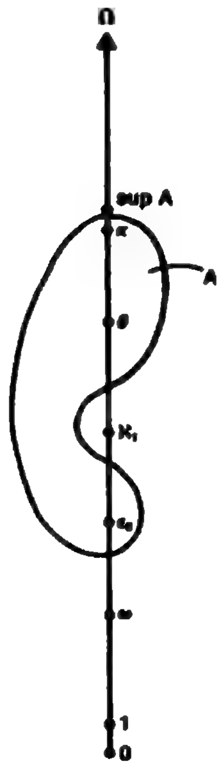
ما هي أوميغا الكبيرة Ω؟ إنها ما يقصده الناس عندما يتحدثون عن اللانهاية المتحررة من أي نوع من القيود. إنها اللانهاية المطلقة. والمطلقات بطبيعتها لا تُعرف على نحو كامل بعقلانية أو موضوعية. لا يمكن للمطلق أن يُعرف إلا بالدخول إليه كفاعل، وتعريف فاعلك (ذاتك) بالمطلق هو أن تتخلى عن إحساسك بهويتك الشخصية. «عليك أن تخلع نعليك قبل الدخول إلى المعبد».

أمّا المجموعة فهي شكل أو فكر يمكن أن يُعرف بطريقة موضوعية، ويمكن التعامل معها عقلياً ودراستها بدون التخلي عن دور الفاعل أو المراقِب. إن المبدأ الثالث هو في الحقيقة مبدأ انعكاس، أي طريقة للتعبير عن تفوق التراكم اللانهائي المطلق المُسمَّى On. يقول المبدأ الثالث إنه لا توجد مجموعة من الأعداد الترتيبية يمكن أن تصل إلى أوميغا الكبيرة، أي إنه يوجد لأي مجموعة A، عدد ترتيبي أقل من أوميغا الكبيرة وأكبر من أي عنصر في A. وهذا يعني وجود عدد ترتيبي $\sup A$، يقع بين A وأوميغا الكبيرة بعيدة المنال.

إذا استخدمنا المبدأ الأول فحسب، عندها نحصل على أوميغا العادية ω، وهي تراكم من الأعداد الترتيبية المنتهية، وتُعرف أيضاً بـ«الفئة الأولى للأعداد». أما الفئة الثانية للأعداد فهي تراكم الأعداد الترتيبية الإضافية التي يمكن الحصول عليها من تكرار المبدأين الأول والثاني، حيث يُستخدم

المبدأ الثاني للمتتاليات القابلة للعدّ فحسب $\{a_n\}$. باعتبار أن نهاية متتالية الأعداد الترتيبية القابلة للعدّ هي أيضاً قابلة للعدّ (والذي سنثبته في القسم التالي)، نجد أن الفئة الثانية للأعداد هي $\{a : \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\omega}}\}$، تراكم كل الأعداد الترتيبية اللانهائية القابلة للعدّ.

الآن، ما لم نفترض صراحة أن كل مجموعة وكل عدد ترتيبي قابلان للعدّ، فلا يوجد سبب يمنع الفئة الثانية للأعداد من أن تكون مجموعة. من الصعب بالتأكيد تخيل أعداد ترتيبية أكبر وأكبر من الأعداد القابلة للعدّ (تذكرون المتاعب التي واجهتنا مع إبسيلون-صفر). لكن من جهة أخرى، تبدو فكرة الأعداد الترتيبية العشوائية التي يمكن الحصول عليها من خلال التطبيق المتكرر للمبدأين الأول والثاني واضحة تماماً.



الشكل 74

يصرّ البعض على أن كل مجموعة قابلة للعدّ... هذه هي خاصية «بروير»[1]. لكن إذا كنا موضوعيين تماماً بشأن المجموعات، ونفترض أن المجموعة هي شكل موجود بغض النظر عن أي قدرة بشرية على استيعابه، فيبدو أنه لا يوجد سبب يمنع اعتبار الفئة الثانية للأعداد مجموعة. يتناقض الوضع هنا مع التراكم *On* لكل الأعداد الترتيبية. ومع أن افتراض الفئة الثانية كمجموعة لا يبدو سيئاً، إلا أن الافتراض بأن *On* مجموعة يؤدي مباشرة إلى الوقوع في تناقض.

لذا بقبولنا أن الفئة الثانية هي مجموعة، نستنتج أنها لا تستنفذ *On*، أي لا تناظرها بعدد العناصر، لأن ما من مجموعة يمكنها استنفاذ اللانهائي. أي إنه يمكننا إيجاد العدد الترتيبي ألِف-واحد الذي يساوي «sup (الفئة الثانية)»، والذي يقع بين أوميغا الكبيرة وجميع الأعداد الترتيبية القابلة للعدّ. ويُكتب كمجموعة على النحو:

$$\aleph_1 = \{0,1,\ldots \omega,\omega.2,\ldots \omega^2,\ldots \omega^\omega,\ldots \epsilon_0,\ldots \alpha,\ldots\}$$

حيث تشير «...» الأخيرة إلى «الأكبر». لا يوجد ألِف-واحد في الفئة الثانية للأعداد (لأنه إذا وُجد فسيكون أقل من نفسه)، وهو غير قابل للعدّ، فلو كان لدينا $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ سيكون لدينا أيضاً $\aleph_1 =$ ، أي إن ألِف-واحد في الفئة الثانية للأعداد، وهذا تناقض.

يقع ألِف-واحد بعد أي مجموع من الأعداد الترتيبية القابل للعدّ وأقل من نفسه. لا يمكننا الوصول إليه إلا عن طريق إضافة ألِف-واحد من الأعداد الترتيبية إلى بعضها البعض. يعني ذلك أنه لا يمكننا الوصول إلى ألِف-واحد من الأسفل. عموماً، أي عدد ترتيبي a لا يمكن تمثيله كمجموع من أعداد ترتيبية أقل منه يُدعى عدداً *عادياً*، وسنرى المزيد من الأعداد العادية في قسم «الأعداد الأصلية الكبيرة». يمكننا هنا ذكر ملاحظة مثيرة للاهتمام، وهي أنه من بين كل الأعداد الترتيبية وصولاً إلى ألِف-واحد، فإن 0 و1 و2 وω و$\aleph_1$ أعداد عادية فحسب، وسنوضح ذلك فيما يلي.

1- L. E. J. Brouwer, *Collected Works* (Amsterdam: North-Holland, 1975), p. 133.

الصفر 0 عدد عادي لأنه ليس مجموعاً لأعداد ترتيبية أقل منه. العدد 1 ليس مجموعاً لأعداد ترتيبية أقل منه، لأنه لا يمكن الحصول عليه بإضافة أصفار مع بعضها البعض. العدد 2 ليس مجموعاً لأقل من اثنين من الأعداد الترتيبية والتي أقل من 2، لأنه لا يمكن الحصول عليه بإضافة صفر واحد أو واحد واحد. لا يوجد تعاقب من الأعداد الترتيبية $a+1$ أكبر من العدد 2 ويكون عدد عادي، لأن أي تعاقب $a+1$ هو مجموع عددين ترتيبيين اثنين (واللذين يُفترض أنهما أقل منه). ω عدد عادي لأنه لا يمكن الحصول عليه مطلقاً من إضافة العديد من الأعداد المتنهية المحدودة. وأخيراً، ألِف–واحد عدد عادي لأن جمع أقل من ألِف–واحد من الأعداد الترتيبية الأقل من ألِف–واحد هو جمع قابل للعدّ لأعداد ترتيبية قابلة للعدّ، والذي سيعطينا دائماً عدداً ترتيبياً آخر قابلاً للعدّ وأقل من ألِف–واحد (كما ستثبت في القسم التالي).

إن حقيقة أن ألِف–واحد عدد عادي أمر يصعب استيعابه، لكنه في الواقع ليس أصعب من استيعاب أن 2 عدد عادي. إذا كان كل ما يمكنك استيعابه هو العدد 1، فكل ما يمكن تخيله هو «واحد»... ولا يمكنك تصور الوصول إلى العدد 2. إذا كان كل ما يمكنك استيعابه هو الأعداد المنتهية، فكل ما يمكنك تخيله هو مجموعات منتهية مؤلّفة من أعداد منتهية مُضافة إلى بعضها البعض... ولن تتصور الوصول إلى أوميغا. وأخيراً، إذا كان كل ما يمكنك استيعابه هو الأعداد الترتيبية القابلة للعدّ، فكل ما يمكنك تصوره هو النهايات القابلة للعدّ للأعداد الترتيبية القابلة للعدّ... ولن يمكنك معرفة كيفية الوصول إلى ألِف–واحد.

الأصول

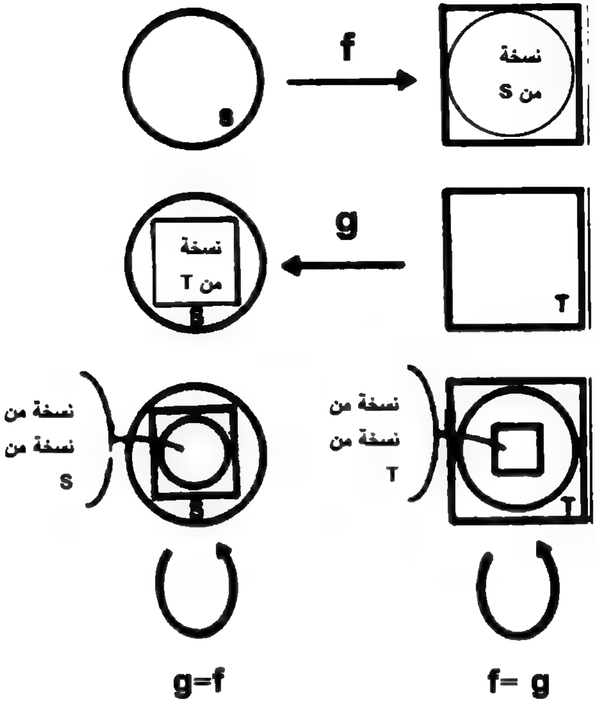
نقول عن المجموعتين S وT إن لهما العدد نفسه من العناصر إذا وفقط إذا أمكن ربط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد من المجموعة الثانية، أي إذا تحققت علاقة «تناظر واحد لواحد»، والتي تُكتب على النحو: $\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{T}}$. ويمكن أن ننظر إلى هذه العلاقة على أنها إمكانية تحويل المجموعة الأولى إلى المجموعة الثانية باستبدال كل عنصر تباعاً، وبدون تدمير أو دمج أو إنشاء أو تقسيم أي من عناصر المجموعتين.

نعرِّف العلاقة $\bar{\bar{S}}\leq\bar{\bar{T}}$ بأن عدد عناصر الأولى أقل أو تساوي عدد عناصر الثانية، وتعني إمكانية ربط كل عنصر من S لكن ليس بالضرورة بكل عنصر من T. ويُعبَّر عنها بإمكانية تحويل S إلى جزء من T، أو أن هناك نسخة من S محتواة في T.

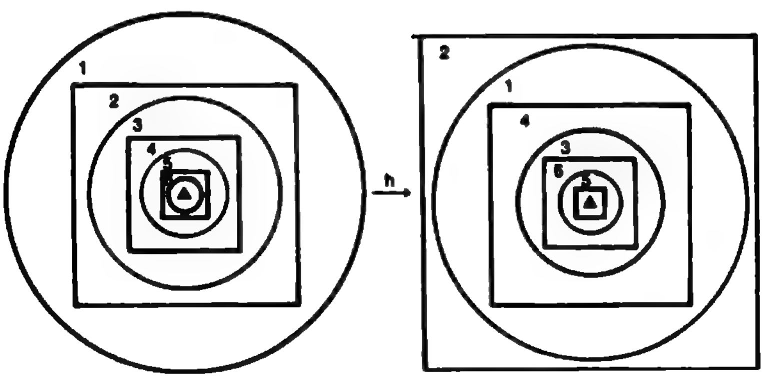
في حال كان حديثنا عن المجموعات المتهية، فيمكن ألا نذكر أنه إذا كان $\bar{\bar{S}}\leq\bar{\bar{T}}$ و $\bar{\bar{T}}\leq\bar{\bar{S}}$ فإن $\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{T}}$. لكن هناك خطراً في التسرع إلى استنتاج حول المجموعات اللانهائية، لأنها تتميز ببعض الخصائص غير المتوقعة والمعاكسة للبديهة. عموماً، اتضح لنا أنه من الممكن أن نثبت: إذا كان $\bar{\bar{S}}\leq\bar{\bar{T}}$ و $\bar{\bar{T}}\leq\bar{\bar{S}}$ فإن $\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{T}}$. وهذا الإثبات هو فحوى ما يُدعى عادة بـ نظرية شودور– بيرنستين، وهي كالتالي.

إذا كان التابع f يربط عناصر S مع عناصر نسخة من S داخل T، وكان g تابعاً يربط عناصر T مع عناصر نسخة من T داخل S. فنحتاج إلى تابع h يربط عناصر S على كل T.

باستخدام هذين التابعين فإننا نتأرجح بين المجموعتين، ويمكننا بناء متتالية لانهائية منسوجة من نسخ من كل من المجموعتين، كما في الشكل 76.



الشكل 75



الشكل 76

الآن، ليكن h التابع الذي يربط أزواج المناطق المرقَّمة كما توضح الصورة. أي إن التابع h يساوي التابع f في المناطق ذات الأرقام الفردية، وفي المناطق الزوجية نأخذ التابع h ليكون y لا نظير له حيث $g(y)=x$. ربما وُجدت منطقة من S ومن T ليست في أي من المناطق المرقَّمة. من الممكن إظهار أن التابع f سيربط هاتين المنطقتين الإضافيتين (المرسومة في الشكل 76 كمثلثات سوداء) بتناظر واحد لواحد. وبجمع كل ما سبق، نحصل على خريطة التابع h واحد لواحد من S إلى T [2]. تُعرَّف العلاقة $\bar{\bar{S}}\leq\bar{\bar{T}}$ على أنها اجتماع العلاقتين «أصغر أو تساوي» و«لا تساوي». أي إنها تتحقق إذا وُجدت خريطة واحد لواحد من S في T، لكن ما من خريطة من S إلى T تغطي كامل T.

لن تبدو نظرية الأعداد الأصلية ما فوق المنتهية مثيرة للاهتمام حتى نبحث في مجموعات لانهائية من الأعداد الأصلية المختلفة.

لاحظ أن العدد الأصلي المنفصل $\bar{\bar{S}}$ لم يُعرَّف في البداية. بدلاً من ذلك، يبدأ المرء بوصف الظروف التي تكون فيها الأعداد الأصلية تساوي أو أقل من بعضها البعض. العدد الأصلي $\bar{\bar{S}}$ هو كيان مجرد مزدوج يتمّ الوصول إليه عن طريق تجاهل مظهر وترتيب عناصر المجموعة S. إن $\bar{\bar{S}}$ هو شكل صاف بدون محتوى.

يصعب تكوين الصورة الملائمة لمثل هذا المفهوم المجرد، لأننا معتادون على تخيل الأشكال من خلال إلزامها بمحتوى معين. لكن يمكننا تجاوز هذه العادة. يمكننا تخيل مفهوم «إنسان» بدون التفكير بأي شخص محدّد، ويمكننا تخيل مفهوم «ثلاثة» بدون التفكير بأي مجموعة معينة من ثلاثة عناصر.

مع ذلك، من الملائم أن توجد طريقة موحدة لإيجاد تمثيل ملموس للعدد الأصلي $\bar{\bar{S}}$، وعادة ما نكون غير رسميين بشأن التمييز بين المفهوم المجرد $\bar{\bar{S}}$ وتمثيله المعياري كمجموعة.

التمثيل المعياري لـ $\bar{\bar{S}}$ هو العدد الترتيبي a الأصغر حيث إن $\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{a}}$. أي إن العدد الأصلي $\bar{\bar{S}}$ معرَّف بأصغر عدد ترتيبي حيث يكون تطابق واحد لواحد

2- أُخذت هذه الطريقة في توضيح البرهان من Alexander Abian, *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic* (Philadelphia: Saunders, 1965).

بين S وa (يُنظر إليه على أنه المجموعة $\{b : b < a\}$ لكل الأعداد الترتيبية الأصغر من a). مرة أخرى، $\bar{\bar{S}}$ هو أصغر عدد ترتيبي حيث يمكن إدراج S كمتتالية من العناصر من نوع الترتيب a. (ستتناول مسألة ما إذا كان هناك عدد ترتيبي من هذا النوع لأي مجموعة S فيما يلي).

يُعرف العدد الأصلي $\bar{\bar{N}}$ (N مجموعة الأعداد الطبيعية) عادة بـ الألِف-صفر $\aleph_0$. نلاحظ أن هذا التعريف يعني أن $\omega=\aleph_0$؛ ونلاحظ أيضاً أنه نظراً لتحديدنا عدداً ترتيبياً بمجموعة الأعداد التي تسبقه فإن $N=\omega$. وبكلمات دقيقة، إن القيمة المطلقة لمجموعة الأعداد الطبيعية تساوي أوميغا: $\bar{N}=\omega$ وعدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية يساوي ألف-صفر $\bar{\bar{N}}=\aleph_0$؛ لأننا نحصل على ω من الأعداد الطبيعية في ترتيبها الطبيعي عن طريق التفكير في نسقها المجرد فحسب، ونحصل على $\aleph_0$ من الأعداد الطبيعية عن طريق التفكير في تعددها أو كثرتها المجردة فحسب. لكن ما إن يفهم المرء هذه النقطة، فليس من الضرورة أن يتعثر بها كل ثانية، ومن الآن فصاعداً يمكننا التعامل مع N وω و$\aleph_0$ كمرادفات ذات ظلال مختلفة من المعنى.

تتمّ عمليات الجمع والضرب والرفع إلى أُس للأعداد الأصلية وفق قواعد مختلفة تماماً عن قواعد العمليات ذاتها على الأعداد الترتيبية (على الرغم من أن هذه القواعد تعطي النتائج نفسها للأعداد المنتهية). إذا كان κ وλ أعداداً أصلية، فإننا نحصل على أصلية $\kappa+\lambda$ بإيجاد مجموعتين K و I حيث يكون عدد عناصر المجموعة K هو κ وعدد عناصر المجموعة I هو λ، أي: $\bar{\bar{K}}=\kappa$ و $\bar{\bar{L}}=\lambda$، وألا توجد عناصر مشتركة بين المجموعتين، فيكون $\kappa+\lambda=\bar{\bar{K}} \cup \bar{\bar{L}}$.

نتذكر هنا أننا نحصل على ناتج الجمع بالنسبة لعددين ترتيبيين κ و λ من خلال وضع نسخة من λ بعد نسخة من κ. ولمعرفة الاختلاف بين عمليتي الجمع، نلاحظ أن إيجاد ناتج جمع 2+3 بطريقة الأعداد الأصلية، يمكن أن يتمّ بوضع ثلاثة أصابع من اليد اليسرى وأصبعين من اليد اليمنى، ثم إيجاد أصغر عدد ترتيبي يمكن ربط عناصره بتناظر واحد لواحد مع عناصر مجموعة الأصابع التي لديك. أما ناتج العملية نفسها بطريقة الأعداد الترتيبية، فإننا نحصل عليه بأن نعدّ عددين بعد العدد 3.

بالرغم من أن $\omega + \omega \neq \omega$، فإن $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. يتحقق ذلك بسبب استخدامنا الجمع الترتيبي للأعداد الترتيبية والجمع الأصلي للأعداد الأصلية. ولفهم هذه الحقيقة، لنعتبر أن O هي مجموعة كل الأعداد الفردية، وE هي مجموعة كل الأعداد الزوجية، وN مجموعة كل الأعداد الطبيعية. إن العدد الأصلي لكل من هذه المجموعات هو ذاته $\aleph_0$ كما تثبت الصورة أعلاه. ولأن المجموعتين O وE تملكان العدد الأصلي ذاته $\aleph_0$ ولا تملكان أي عنصر مشترك، فإن

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \bar{\bar{O \cup E}} = \bar{\bar{N}} = \aleph_0$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
O = \{1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots, & 2k+1, & \ldots\} \\
& \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
N = \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & k & \ldots\} \\
& \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
E = \{0, & 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2k & \ldots\}
\end{array}$$

إن هذه الحقيقة التي تقول إنه يمكن لأصلية مجموعة لانهائية أن تساوي أصلية مجموعة فرعية منها، وإن إضافة عدد أصلي لانهائي إلى نفسه يعطينا العدد نفسه، لأمر مدهش بالفعل! وكما ذكرت في الفصل الأول، حيَّر هذا الجانب للأعداد الأصلية المفكرين قبل الكانتوريين لدرجة اعتقادهم عموماً بعدم وجود أمل في الوصول إلى نظرية للأعداد الأصلية اللانهائية أكثر تعقيداً من: «جميع اللانهايات متساوية».

يمكن استخدام الإثبات السابق $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ على أي عدد أصلي لانهائي. حيث نفكر في الأعداد الأصلية كنوع محدّد ومميز من الأعداد الترتيبية. وعلى وجه الخصوص، إذا كان κ عدداً أصلياً لانهائياً، عندها سيكون نهاية لعدد ترتيبي (بمعنى معاكس لمفهوم العدد التالي). يؤدي ذلك إلى أن:

1) κ عدد أصلي، λ أصغر من κ، إذاً $\bar{\bar{\kappa}} \neq \bar{\bar{\lambda}}$.

2) إذا كان $a+1$ عدداً ترتيبياً لانهائياً، فإن $\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{1}} = \bar{\bar{a}}$).

الآن، نُعرِّف عدداً ترتيبياً عشوائياً على أنه عدد زوجي إذا كان نهاية لعدد ترتيبي أو نهاية لعدد ترتيبي مضافاً إليه عدد طبيعي زوجي. ونُعرِّفه على أنه عدد فردي إذا كان نهاية لعدد ترتيبي مضافاً إليه عدد طبيعي فردي.

إذا اعتبرنا O_κ وE_κ، على التوالي، مجموعتي كل الأعداد الترتيبية الفردية والزوجية الأقل من κ، فإننا نجد أن $\kappa + \kappa = O_\kappa \cup \bar{\bar{E}}_\kappa = \bar{\bar{\kappa}} = \kappa$.

$$\begin{array}{llllllllllll}
O_\kappa = \{1, & 3, & 5, & 7, & \ldots \omega+1, & \omega+3, & \ldots, & \epsilon_0+1, & \epsilon_0+3, & \ldots, & \lambda+2k+1, & \ldots\} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
\kappa \; = \{0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \omega, & \omega+1, & \ldots, & \epsilon_0, & \epsilon_0+1, & \ldots, & \lambda+k, & \ldots\} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
E_\kappa = \{0, & 2, & 4, & 6, & \ldots \omega, & \omega+2, & \ldots, & \epsilon_0, & \epsilon_0+2, & \ldots, & \lambda+2k & \ldots\}
\end{array}$$

لكن جمع الأعداد الأصلية فوق المنتهية أمر ممل للغاية، فجمع أي عددين سيكون مساوياً لكل منهما. ونوضح ذلك كما يلي:

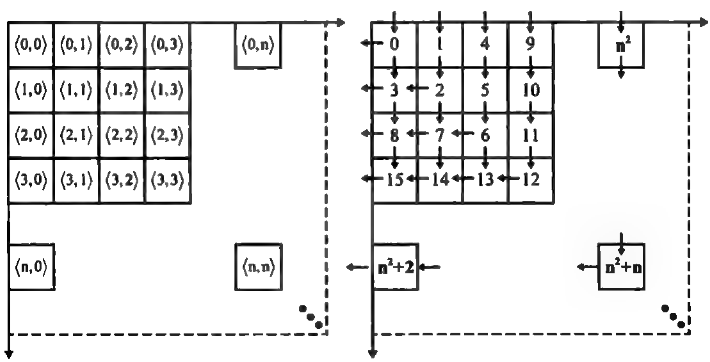
إذا كان κ وλ أعداداً أصلية، وκ عدد لانهائي، و$\lambda \le \kappa$، فيكون:

$$\kappa \le \kappa + \lambda \le \kappa + K = K$$

لكن إذا $\kappa \le \kappa+\lambda$، و $\kappa+\lambda \le K$، عندها يمكن تطبيق قضية شرودر–برينستين لاستنتاج أن $\kappa + \lambda = K$.

أما عملية ضرب الأعداد الأصلية فتُعرَّف كالتالي:

إذا كان κ و λ أعداداً أصلية، فإن $\kappa . \lambda$ هو $\bar{\bar{\kappa}} * \bar{\bar{\lambda}}$ حيث $\kappa * \lambda$ هو ناتج التقاطع الديكارتي للعددين، وهو المجموعة $\{<u, v>: u \in \kappa \ \& \ v \in \lambda\}$ لكل الأزواج المرتبة مع المكوِّن الأول من المجموعة κ والمكوِّن الثاني من λ.



(A) (B)

الشكل 77

إن ناتج ضرب ألف–صفر بذاته، $\aleph_0 . \aleph_0$، يساوي $\aleph_0$، كما هو موضح في

الشكل 77 من خلال إظهار الروابط واحد لواحد بين $\bar{\bar{\omega}}*\bar{\bar{\omega}}$ و$\bar{\bar{\omega}}$. الفكرة أنه إذا واصلت ملء أزواج الأعداد على اليسار، وملء الأعداد على اليمين، فإنك ستملأ ربعين من المستوي فقط. نحصل على الروابط واحد لواحد بربط أي زوج من الأعداد على اليسار مع الأعداد التي تشغل الموضع المقابل على اليمين.

لنفرض أن $\max(a, b)$ هي القيمة الأعظمية بين العددين a وb. على سبيل المثال:

$$\max(1,2)=2 \text{،} \max(3,3)=3 \text{،} \max(\omega,12)=\omega$$

يمكننا أيضاً أن نثبت أن $\bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{\omega}}*\bar{\bar{\omega}}$، من خلال كتابة $\omega*\omega$ كمتتالية طولها ω. إحدى طرق تطبيق ذلك تشبه الطريقة المصوَّرة في الشكل 77، وهي كتابة $\langle a,b \rangle$ قبل $\langle c,d \rangle$ إذا:

1) $\max(a,b)<\max(c,d)$ ؛ أو

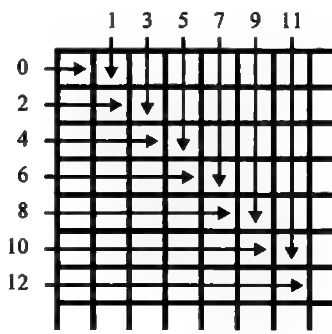
2) $\max(a,b)=\max(c,d)$ و $a<c$ ؛ أو

3) $\max(a,b)=\max(c,d)$ و $a=c$ و $b<d$.

تحت هذا الترتيب، نكتب $\omega*\omega$ كما يوضح الشكل 78.

$$\aleph_0.\aleph_0 = \overline{\overline{\omega\times\omega}} = \overline{\overline{1+3+5+7+\ldots}} = \bar{\bar{\omega}} = \aleph_0$$

$$\omega\times\omega = \{ \langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \ldots \}$$



الشكل 78

يمكن أن نعمِّم هذا الإثبات على أي عدد أصلي فوق منته κ، أي إن $\kappa.\kappa=\kappa$. ويعني ذلك أننا إذا رتبنا عناصر $\kappa.\kappa$ وفقاً للترتيب المحدد في الفقرة

الأخيرة، فيحصل المرء على متتالية من نوع الترتيب κ. والبديهة التي نحصل عليها من هذه النتيجة أنه بالنسبة لأي عددين أصليين لانهائيين κ و λ فإن $\kappa.\lambda = \max(\kappa, \lambda)$. لذا فإن جمع وضرب الأعداد الأصلية فوق المنتهية أمر ممل أيضاً. الآن دعونا نعود ونؤسس خاصية أخرى للأعداد الترتيبية القابلة للعد: مجموع أعداد ترتيبية قابلة للعد هو قابل للعد. (استُخدمت هذه الخاصية في القسم الأخير).

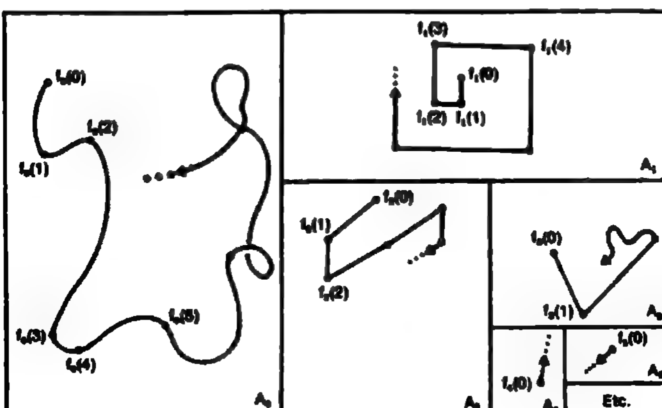
يُقال إن المجموعة غير الخالية M أنها قابلة للعدّ إذا تحقق $\bar{\bar{M}} \leq \aleph_0$. وإن المجموعة M قابلة للعدّ إذا وفقط إذا كان هناك تابع من ω على M يربط كل عناصر M (ربما مع التكرار في حالة كانت M متنهية).

الآن نثبت أن نتيجة اجتماع عدة مجموعات قابلة للعد هي قابلة للعد. لتكن $U_n\, A_n$ هي:

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

إذا كان لكل $n \in \omega$ لدينا المجموعة A_n والتابع f_n يُرسم من ω إلى A_n، فيكون لدينا التابع g الذي يُرسم من ω على $U_n\, A_n$ إذا اعتبرنا $g(k)=f_a(b)$، حيث $\langle a,b \rangle$ هو الزوج ذو الترتيب k في كتابة $\omega.\omega$ المُعطاة سابقاً. مع ذلك، يُكتب التابع $U_n\, A_n\, g$ كـ:

$$\{f_0(0), f_0(1), f_1(0), f_0(2), f_1(2), f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_0(3), \ldots\}$$



الشكل 93

المجموعة الثانية للأعداد الترتيبية، التي تُدعى (II) حسب كانتور، هي أصغر مجموعة من الأعداد الترتيبية التي تملك الخاصيات الثلاث التالية:

1) $\omega \in (II)$؛

2) إذا كانت a تنتمي إلى (II)، فإن $a+1$ تنتمي إليها أيضاً؛

3) إذا كانت a_n تنتمي إلى (II) لكل n تنتمي إلى ω، فإن $\cup\, a_n \in (II)$.

وبما أن $\bar{\bar{\omega}}=\aleph_0$، و$\aleph_0=\aleph_0+1$، و$\aleph_0.\aleph_0=\aleph_0$، إذاً من الواضح أن أصلية كل عنصر –حيث كل عنصر في (II) هو مجموعة أيضاً– في المجموعة (II) هو $\aleph_0$.

يحدِّد القسم «ألِف–واحد والمجموعة On» أن $\aleph_1=\sup(II)$. ألِف واحد هو أول عدد أصلي غير قابل للعدّ. وهو غير قابل للعدّ ليس لأن أي عدد ترتيبي أقل منه هو قابل للعدّ فحسب، بل لأن الافتراض بأنه قابل للعدّ ينشئ تناقضاً، فسيكون عندها sup لنهاية أو اجتماع عناصر (II) وأيضاً عنصراً من المجموعة ذاتها، وبالتالي سيكون أقل من نفسه.

لنعتبر أن $\aleph_2=\{a\colon \bar{\bar{a}}\leq\aleph_1\}$. من الواضح هنا أن $\aleph_2$ هو أول عدد أصلي أكبر من $\aleph_1$. وذلك لأن $\bar{\bar{\aleph}}_1 \leq \bar{\bar{\aleph}}_2$، فالخريطة التي تربط عناصر ألِف–واحد إلى ألِف–اثنين هي من النمط واحد لواحد؛ وأيضاً $\bar{\bar{\aleph}}_2 \neq \bar{\bar{\aleph}}_1$، لأن مساواة الواحد للآخر يعني أن يكون ألِف–اثنين أصغر من نفسه، وهذا تناقض. إذاً $\bar{\bar{\aleph}}_1 < \bar{\bar{\aleph}}_2$. وتُكتب كمجموعة على النحو:

$$\aleph_2=\{0,1,2,\ldots\omega^2,\ldots\ \omega^{\omega},\ldots\ \epsilon_0,\ldots\ \aleph_1,\ldots\ \aleph_1+\omega,\ldots\ \aleph_1+\aleph_1,\ldots\ \aleph_1{}^{\aleph_1},\ldots\}$$

ونلاحظ هنا أننا نتكلم عن الجمع والضرب والرفع إلى أُس للأعداد الترتيبية. ومع ذلك، فإن «$\aleph_1+\aleph_1$» يعني النمط الترتيبي للتنظيم الذي نحصل عليه من اصطفاف نسختين من $\aleph_1$ توضعان الواحدة بعد الأخرى.

يجب أن نبقي في أذهاننا أننا نعتبر العدد الأصلي نوعاً خاصاً من الأعداد الترتيبية. أي إن العدد الأصلي هو عدد ترتيبي a الذي تحقق كل الأعداد الترتيبية b قبله $\bar{\bar{a}} < \bar{\bar{b}}$. وتوصلنا إلى أنه يوجد Ω من الأعداد الأصلية فوق المنتهية، والتي تشكِّل التعددية $\aleph_a=a \in On$. ويُعرَّف العدد الأصلي $\aleph_0$ لكل عدد ترتيبي a كما يلي:

1) إذا كان $a=0$، فإن $\aleph_a=\omega$.

2) إذا كان $a=b+1$، فإن $\aleph_a=\{c: \bar{\bar{c}}\leq \aleph_b\}$

3) إذا كان a نهاية عدد ترتيبي، فإن $\aleph_a=\sup\{\aleph_b:b<a\}$.

وكمثال عن الحالة الثالثة، نذكر أن $\aleph_\omega=\{0,1,\dots \aleph_0,\dots \aleph_1,\dots \aleph_3,\dots\}$.

يمكن أن نحصل على هذه الألِفات بطريقة مجردة للغاية. ربما نتساءل عما إذا كانت هذه الأعداد موجودة فعلاً. تطرَّقنا إلى هذا السؤال في القسم السابق. نظراً لأننا قبلنا المبدأ الثالث (أياً كانت A مجموعة من الأعداد الترتيبية، يوجد على الأقل مجموعة $\sup A$ أكبر من أي عنصر من A)، أصبح السؤال عما إذا كانت أشياء $\{a: \bar{\bar{a}}<\aleph_1\}$ أو $\{\aleph_a:a<\omega\}$ هي مجموعات أو لا.

حسناً، ما هي المجموعة؟ بكلمات كانتور، «المجموعة هي كثرة تسمح بالتفكير بها كـ واحد». (انظر الهامش 1، الفصل الخامس). ومن الواضح أن $\{a: \bar{\bar{a}}<\aleph_1\}$ توجد ككثرة أو تعددية. والسؤال هنا عما إذا أمكن لهذه التعددية أن توجد كواحد، كشيء مفرد ومنتهٍ، كوحدة، كمجموعة.

يأتي معنى السؤال من بعض التعدديات التي لا يمكن بطبيعتها أن توجد كوحدات. مثل التعدديات اللانهائية المطلقة، ككل الأفكار العقلانية، وفئة كل المجموعات A، أو فئة كل الأعداد الترتيبية On، التي لا يمكن لأي منها أن يكون مجموعة لكيلا ينشأ تناقض. وهذا التناقض هو أن فكرة منطقية أو مجموعة أو عدداً ترتيبياً ما، محتوى في نفسه.

تحدث كانتور عن التعدديات اللانهائية المطلقة بوصفها «تعدديات متنافرة». وكان يعني بذلك أنها غير قابلة للوجود كوحدات لأن وحدتها ستقود إلى عدم اتساق أو تناقض. أما التعددية التي يمكن لها أن توجد ككائن مفرد مكتمل فهي «تعدديات متسقة»، أو مجموعة.

مع اعتبارنا لكل ذلك، يمكننا أن نفهم عبارات كانتور ونجيب على السؤال عما إذا كانت الألِفات توجد فعلاً. يظهَر أدناه مقطع من رسالة كتبها كانتور إلى ديديكايند في 28 آب 1899.

«يمكن للمرء أن يتساءل كيف لي أن أعرف أن المجموعات المرتبة جيداً أو المتتاليات التي تمثِّل الأعداد الأصلية $\aleph_0$، $\aleph_1$، ... $\aleph_\omega$، ... $\aleph_{\aleph_1}$... هي فعلاً

مجموعات بمعنى «تعدديات متسقة». أليس من الممكن أن تكون «تعدديات متنافرة»، وأن أحداً لم يلاحظ بعد التناقض الذي ينشأ من التعامل معها كوحدة؟ جوابي على ذلك هو أن هذا السؤال قابل للطرح بالنسبة للمجموعات المنتهية أيضاً، وإذا فكرنا ملياً لبعض الوقت سنجد أنه ما من إثبات على اتساق التعدديات المنتهية أيضاً. وبكلمات أخرى: إن حقيقة اتساق التعدديات المنتهية أمر غير قابل للإثبات، ويمكن أن ندعوه «بديهية علم الحساب» بالمعنى القديم للكلمة. وبالسياق ذاته، إن اتساق التعدديات التي يكون فيها الألِف عددها الأصلي هو أيضاً «بديهية علم الحساب فوق المنتهي»[3].

من الواضح أنه توجد العديد من الأشياء في العالم وفي مشهد العقل. يوجد في الحقيقة موقف فلسفي، يُدعى بـ«الاسمانية المتطرفة»، والذي ينكر حتى وجود المجموعات المنتهية. لكن هذا الموقف يتعارض مع حقيقة أن الجميع يتعامل مع تعدديات على أنها وحدات. إذا أخذنا أي جملة مثلاً، فإننا نستوعب تعددية الكلمات فيها كوحدة.

دافع كانتور عن مجموعة مثل ألِف-واحد على أنها تُدرك إدراكاً بسيطاً ومباشراً في مشهد العقل. ومع أن هذا الدفاع يبدو مثيراً للاهتمام، إلا أنه غير حاسم.

يكمن الضعف في «بديهية علم الحساب فوق المنتهي» في صعوبة الاستيعاب المباشر للمجموعات المطابقة للألِفات فوق المنتهية. توقع كانتور أن يواجه هذا الاعتراض، وأشار في مكان آخر أن عدداً مثل ألِف-اثنين قابل للاستيعاب بسهولة أكبر من بعض الأعداد الطبيعية العشوائية ذات عشرات ملايين الأصفار[4]. أصبح موقف كانتور أكثر انتشاراً مع مرور السنين، وذلك مع ازدياد الأشخاص الذي فهموا وتعاملوا مع الألِفات بدون أن يواجهوا أي تناقضات. لكن علينا القول، إن ما قام به في عام 1899، هو مثال عالٍ من الشجاعة الفكرية.

3- طُبعت الرسالة في ملحق: Herbert Meschkowski, *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors* (Braunschweig: Vieweg, 1967).

4- يظهر هذا التعليق في Cantor's «Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten»، الذي أُعيدت طباعته في *Gesammelte Abhandlung*, pp. 378-439.

وجدنا سابقاً أن جمع وضرب الأعداد الأصلية أمر مملٌّ، لأن نتيجة جمع أو ضرب عددين أصليين لانهائيين تساوي القيمة العظمى لهما معاً. لكن رفع عدد أصلي إلى أس أمر مختلف تماماً. وما تزال مسألة تحديد القيمة الدقيقة للرفع الأُسي الأكثر بساطة $2^{\aleph_0}$ بدون حلّ منذ مئة عام، ولا يبدو من حلٍّ قريب في الأفق.

في حالة الأعداد الترتيبية، نقول إن المتتالية-κ من العدد λ عملية تختار بنجاح عدداً يساوي κ من العدد λ في صف. يمكننا اعتبار هذه المتتالية تابعاً مع أساس κ ومجال أصغر أو يساوي λ. أي إنه لكل عدد ترتيبي $a \in \kappa$، فإن التابع $s(a)$ هو عدد ترتيبي لا نظير له $b \in \lambda$ والذي يملأ المكان ذو الترتيب a من المتتالية. هناك طريقة أخرى للتفكير في المتتالية-κ من العدد λ على أنها مجموعة من العناصر λ. وبالتالي، <0, 3, 1> هي «متتالية-3» من 4، و<... 1, 3, 5, ... 0, 2, 4> هي «متتالية- $\omega+\omega$» من ω، و<... 0, 1, 0, 1, 0> هي «متتالية-ω» من 2. ونلاحظ أنه يمكننا التفكير في المتتالية الأخيرة كتابع s حيث $s(n) = 0$ إذا كان n زوجياً و $s(n) = 1$ إذا كان n فردياً.

تُدعى مجموعة كل المتتاليات κ من λ عادة بـλ^κ.(لا علاقة لهذا الرمز برمز الأُس الرباعي المذكور في قسم «من الأوميغا إلى الإبسيلون-صفر»). إذا كان κ و λ أعداداً أصلية، نُعرِّف العدد الأصلي المرفوع إلى الأُس λ^κ بأنه العدد الأصلي λ^κ للمجموعة التي تضمّ كل المتتاليات-κ من λ.

$$\lambda^{\kappa} = \overbrace{\overbrace{(1+1+1+\ldots)}^{\lambda\text{ ones}}\cdot\overbrace{(1+1+1+\ldots)}^{\lambda\text{ ones}}\cdot\overbrace{(1+1+1+\ldots)}^{\lambda\text{ ones}}\cdot\ldots}^{\kappa\text{ lambdas}}$$

وأحد الدوافع لهذا التعريف أننا نفكر في λ^κ كناتج عن جمع عدد κ من λ، ثم كل من λ^κ تنتج من وحدات κ تظهر في الناتج النهائي الذي نحصل عليه من اختيار واحدة κ من كل من المجموعات κ من λ. وتُمثّل هذه العملية بعنصر من λ^κ. وفي طريقة أخرى للتعبير عن ذلك، أنه يجب أن يوجد λ^κ

من العناصر من λ^κ، بما أن المتتالية-κ العشوائية من λ يمكن أن تتشكل من اختيار κ مرة من بين λ في صف، وهو $\lambda. \lambda. \lambda. ...$ من الطرق، والذي يجب أن يحوي الناتج المشار إليه عدد κ من العناصر.

في السابع من كانون الأول عام 1873، أثبت جورج كانتور الجزء الأول من نظريته الشهيرة، والتي تُعرف الآن بنظرية كانتور: «أي عدد أصلي κ، فإن $\kappa<2^\kappa$».

من السهل أن نرى أن $\kappa\leq 2^\kappa$، بما أن بإمكاننا رسم خريطة تناظر واحد لواحد من κ إلى المجموعة 2^κ، التي تضمّ كل المتتاليات-κ من الأصفار والواحدات. ويتمّ ذلك من خلال جعل كل $a \in \kappa$ توافق المتتالية c_a، والتي تضمّ أصفاراً في كل مكان باستثناء المكان ذي الترتيب a. أما كتابع، فيمكننا أن نعرِّف المتتالية c_a كما يلي: $c_a(b) = 1$ عندما $b=a$، و $c_a(b) = 0$ عندما $b \neq a$.

وباعتبار مجموعة-هي على سبيل المثال، فإنها ستكون:

$$< 0, 0, 1, 0, 0, ... 0, ... >$$

لكن الصعوبة الحقيقية في إثبات نظرية كانتور تكمن في إثبات أن $\kappa \neq 2^\kappa$. ويتم ذلك عبر إظهار أنه لا يمكن رسم خريطة تناظر واحد لواحد من المجموعة κ إلى المجموعة 2^κ. وبتعبير آخر، يجب أن نظهِر أننا متى رسمنا خريطة من عناصر κ على مجموعة $S=\{s_a; a \in \kappa\}$ التي تحويها المجموعة 2^κ، سيوجد دائماً عنصر d حيث $d \notin S$.

$$
\begin{array}{l}
s_0 = < \boxed{0}, 0, 0, \ldots 0, 0, \ldots 0, \ldots > \\
s_1 = < 1, \boxed{1}, 1, \ldots 1, 1, \ldots 1, \ldots > \\
s_2 = < 0, 1, \boxed{0}, \ldots 0, 1, \ldots 0, \ldots > \\
\vdots \\
s_a = < 1, 0, 1, \ldots \boxed{1}, 1, \ldots 1, \ldots > \\
s_{a+1} = < 0, 1, 1, \ldots 0, \boxed{0}, \ldots 1, \ldots > \\
\vdots \\
s_b = < 1, 0, 1, \ldots 0, 1, \ldots \boxed{0}, \ldots > \\
\vdots \\
d = < 1, 0, 1, \ldots 0, 1, \ldots 1, \ldots >
\end{array}
$$

$$d(a) = \begin{cases} 1 \text{ إذا } s_a(a) = 0 \\ 0 \text{ إذا } s_a(a) = 1 \end{cases}$$

$$d(a) = 1 - s_a(a)$$

يُدعى الإثبات الأخير بـ «البرهان القطري». ويمكن القول إننا نوجد d عن طريق رسم قطر المجموعة S. وتقوم طريقة التأكد من أن d مختلف عن أي عنصر في S على إثبات أنه لكل $a \in x$ توجد d تختلف عن s_a في الترتيب a. ويتم ذلك بتعريف d كتابع من κ إلى 2 كما يلي:

عندما $s_a(a)=0$، فإن $d(a)=1$

وعندما $s_a(a)=1$، فإن $d(a)=0$.

ولأن $0=1-1$، فبإمكاننا أن نختصر هذا إلى $d(a)=1-s_a(a)$.

أثبتنا الآن أن ($\kappa \leq 2^\kappa$ وأن $\kappa \neq 2^\kappa$)، لذا نستنتج أن $\kappa < 2^\kappa$. وبالتالي فإن $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ و$\aleph_1 < 2^{\aleph_1}$ وهكذا. نلاحظ الآن أن لدينا طريقتين للانتقال من العدد الأصلي κ إلى الأعداد الأصلية الأكبر. من جهة، يمكننا أن نحاكي عملية الانتقال من $\aleph_a$ إلى $\aleph_{a+1}$ بتعريف κ^+ على أنها $\{b: \bar{b} \leq \kappa\}$. إذا كان κ عدداً أصلياً، فإن κ^+ هي أول عدد أصلي أكبر من κ. وهو الأول لأن أي عدد أصلي قبله سيكون أصغر أو يساوي κ وأكبر، لأنه إن لم يكن كذلك فسيصبح عنصراً في نفسه. ومن جهة ثانية، يمكننا أيضاً الحصول على عدد أصلي أكبر من κ بالانتقال من κ إلى 2^κ.

نعرف الآن أن 2^κ أكبر من κ، وأن κ^+ هو أقل عدد أصلي أكبر من κ. لذا يمكننا أن نستنتج أن $\kappa^+ \leq 2^\kappa$.

هل من مزيد نقوله عن العلاقة بين هذين العددين الأصليين؟ في «فرضية الاستمرارية المعممة»، والتي تُعرف اختصاراً بـ GCH، وضع كانتور تخميناً بأنه لأي عدد أصلي κ، فإن $\kappa^+ = 2^\kappa$. ويمكن التعبير عن GCH كما يلي: لكل عدد a، فإن $\aleph_{a+1} = 2^{\aleph_a}$. واعتماداً على ما نعرفه حتى الآن عن المجموعات، لا يمكن إثبات فرضية الاستمرارية المعممة أو دحضها.

في سبيل فهم أفضل لهذه الحالة المثيرة للفضول من العلاقات، سنركز اهتمامنا على قضية خاصة من فرضية الاستمرارية المعممة، تُدعى «فرضية الاستمرارية»، CH، ويُعبَّر عنها بـ: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

الاستمرارية

إن مسألة الاستمرارية هي مسألة تحديد ما إذا كان أي $\aleph_\alpha$ مساوياً لـ $2^{\aleph_0}$. وللوصول إلى فهم حقيقي لما تحتويه المسألة، من الأفضل إلقاء نظرة على عدد من المجموعات المختلفة والتي عدد عناصرها هو $2^{\aleph_0}$، مثل: مجموعة قوى أوميغا، شجرة الاحتمالات الثنائية[5]، المجموعة المغلقة الواحدة[6]، مستقيم الأعداد الحقيقي، المستوي، الفضاء الرياضي الثلاثي الأبعاد.

أولاً، توجد مجموعة كل مجموعات الأعـداد الطبيعية، وهي $\{x : x \subseteq \omega\}$. تُدعى هذه المجموعة «مجموعة قوى أوميغا»، واختصاراً $P\omega$. تضم هذه المجموعة كلّاً من المجموعة الخالية $\emptyset$؛ ومجموعات منتهية من الأعداد الطبيعية مثل:

$\{5\}$

$\{6,28,496,8128,33550336\}$

$\{n : n \leq 1000\}$

وغيرها. ومجموعات لانهائية لكنها قابلة للوصف مثل:

ω

$\{n \in \omega : n > 1000\}$

وربما بعض المجموعات اللانهائية العشوائية من الأعداد التي لا تقبل أي وصف، والتي ناقشنا وجودها سابقاً في قسم «الأعداد الحقيقية العشوائية».

5- شجرة الاحتمالات الثنائية في علوم الحاسب، هي هيكل بيانات شجري الشكل، يتفرَّع من كل عقدة فيه فرعان فقط، فرع يميني وفرع يساري. (المُترجِمة).

6- المجموعة المغلقة الواحدة في الرياضيات، هي المجموعة [0, 1]، أي المجموعة التي تضمّ كل الأعداد الحقيقية الأكبر أو تساوي 0، وأقل أو تساوي 1. (المُترجِمة).

يمكننا إثبات أن $\overline{\overline{P\omega}}$ يساوي $2^{\aleph_0}$، عن طريق إنشاء خريطة واحد لواحد، ولتكن x، من المجموعة $P\omega$ إلى المجموعة ω_2 كما يلي. ولأي مجموعة من الأعداد الطبيعية M، تكون x_M هي «المتتالية-ω» والتي يوجد فيها 1 في المكان ذي الترتيب n عندما $n \in M$، و0 في المكان ذي الترتيب n عندما $n \notin M$. وهكذا، إذا كانت E مجموعة كل الأعداد الزوجية، فإن x_E هي $\langle 0,1,0,1,\ldots \rangle$.

وفي مثال آخر:

إذا كانت $M=\{0,2,3,8,11,14,15,22,\ldots\}$

فإن $x_M= \langle 1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,1,\ldots \rangle$.

لإثبات أن الخريطة هي واحد لواحد، نلاحظ أنه إذا كانت K وM مجموعتين مختلفتين من الأعداد الطبيعية، فيجب أن يكون هناك عدد طبيعي، وليكن t، لا يوجد إلا في مجموعة واحدة منهما. لكن عندها يصبح $x_K(t) \neq x_M(t)$، أي إن x_K و x_M متتاليتان مختلفتان. ولإثبات أنه يمكن رسم خريطة x من $P\omega$ على كل 2^ω، نلاحظ أنه إذا كانت s أي عنصر من 2^ω، وإذا كانت S هي المجموعة $\{n \in \omega : s(n) = 1\}$ لأعداد الفتحات حيث S لديها 1، عندها $x_S = s$.

أياً تكن المجموعة x، فيمكننا تشكيل مجموعة قوى x، وهي المجموعة Px، التي تضمّ جميع المجموعات الفرعية المحتملة من x، والمجموعة 2^ω، التي تضم جميع التوابع من x إلى 2. يمكن تعميم الإثبات السابق بسهولة ليصبح برهاناً لأي مجموعة x، $\overline{\overline{Px}} = \overline{\overline{2^x}}$. يجب أن نذكر هنا بعض التساؤلات عما إذا كانت مجموعات القوى اللانهائية (مثل $P\omega$) هي فعلاً مجموعات، أم هي تعدديات غير متسقة لانهائية مطلقة، والتي لا يمكنها أن توجد كوحدة. إن الحقيقة بأن $P\omega$ غير قابلة للعدّ على نحو يقيني تجعل الفهم صعباً، لكن هذه مثل هذه الصعوبات لا تمنعنا من قبول وجود مجموعات مثل أَلِف-واحد $\aleph_1$.

من المنطقي الاعتقاد بأن مجموعة قوى أي مجموعة κ، $P\kappa$، هي مجموعة. يمكن تبرير هذا الموقف بالحجة التالية. لانتقاء مجموعة فرعية

من κ ، يجب أن نسير من الصفر عبر الأعداد الترتيبية مع زوجين من الأقواس في يدنا اليسرى. يمكننا وضع كل عدد ترتيبي يعجبنا بين القوسين. بعد عدد κ من الخطوات، سنكون قد أنشأنا إحدى المجموعات الفرعية من κ، وهي أيضاً إحدى العناصر المُحتمَلة من $P\kappa$. يمكننا تنفيذ مثل هذه السلسلة من الخيارات العشوائية كما نرغب. وحينها، تخدم فكرة سلسلة عشوائية من الخيارات بعدد κ كفكرة موحّدة تشكل التعددية $y : y \subseteq \kappa$ كوحدة أو كمجموعة.

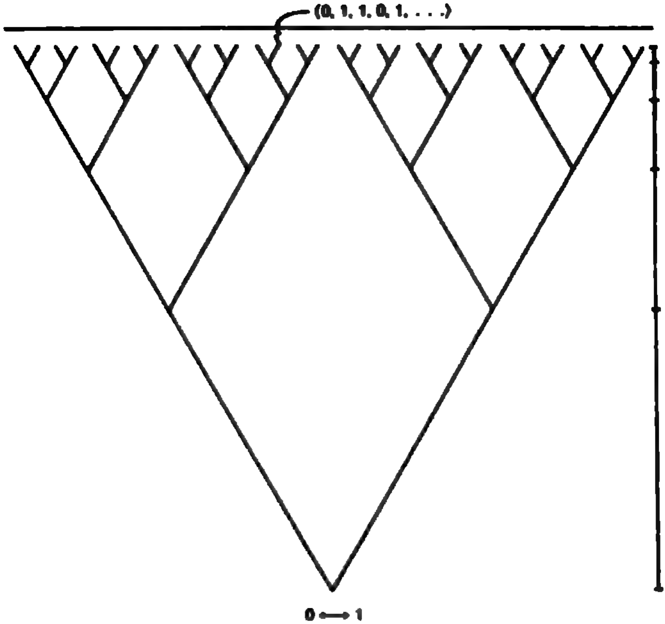
للصدفة، توضح طريقة التفكير هذه بمجموعة قوى κ كيف $P\kappa$ هي 2^{κ}. والآن، القرار لكل $a \in \kappa$ إن كانت تتضمن a هو قرار ثنائي، أي خيار بين بديلين. كم طريقة ممكنة لصنع عدد κ من القرارات الثنائية في صف؟ الجواب هو: اثنان مضروبة بنفسها عدد κ من المرات، أي 2^{κ}. نلاحظ أن هذه الحجة تعمل أيضاً في الحالات المنتهية. وبالتالي فإن $P3$ تضم 2^3 من العناصر، لأننا إذا اعتبرنا 3 هي المجموعة {0,1,2}، فإن

$$P3=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{1,2\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$$

تثبت الحجة القطرية للأعداد الأصلية $\kappa \neq 2^{\kappa}$ الأمر نفسه لأي مجموعة x، $\overline{\overline{x}} \neq \overline{\overline{Px}}$. ويتم ذلك بإظهار أنه ما من تابع f يمكن أن يرسم المجموعة x على مجموعة قوى x، أي Px، لأنه لأي تابع من هذا النوع، لن تكون المجموعة $D_f = \{y \in x : y \notin f(y)\}$ ضمن نطاق التابع f. لِمَ لا؟ لأن افتراضنا بوجود عنصر من المجموعة x يكون تابعه مساوياً للمجموعة D_f يؤدي إلى تناقض. وهو أن العنصر ينتمي إلى مجموعة تابعه ولا ينتمي إليها في الوقت ذاته.

عموماً، أظهرنا حتى الآن وبوضوح أن كلاً من 2^{ω} و Px يملكان العدد الأصلي ذاته $2^{\aleph_0}$، والذي أثبتنا (مرتين) أنه أكبر من $\aleph_0$. ونضع الآن طريقة لتصور 2^{ω}.

الجهة اليسرى 0، والجهة اليمنى 1، ثم يمكن تعريف كل ممر كعنصر من 2^{ω} مع مجموعة من كل الفروع الصاعدة في الشجرة الثنائية.



الشكل 80

إن صورة الشجرة الثنائية ليست بالتأكيد صورة 2^{ω}، نظراً لأننا لا نرى من الشجرة إلا المقاطع المتعددة المنتهية الأساسية. أما الممرات الأخرى فيمكن إدراكها عقلياً ومنطقياً أكثر منه بصرياً. وهذا تمييز مهم. فبالرغم من أن الممرات الصاعدة عبر فروع الشجرة هي العدد الأصلي غير القابل للعدّ $2^{\aleph_0}$، فإن عدد العقد فيها هو $\aleph_0$ فقط. عقد الشجرة هي كل نقطة يؤخذ فيها قرار بالاتجاه يميناً ويساراً. إذا بدأنا بعد العقد حسب الترتيب بالارتفاع، سنجد أن لدينا $\aleph_0 = 1+2+4+8+16+...$. ويمكننا تسمية العقد على نحو منهجي بوضع قائمة بكل المتتاليات الصفرية من الأصفار والواحدات، وكل المتتاليات الواحدية، وكل المتتاليات الثانوية، وهكذا، لنحصل على:

$$\emptyset, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle \ldots$$

وهي قائمة قابلة للعد.

يتجاهل فلاسفة العلم غير الرياضيين في بعض الأحيان هذا التمييز بين

المجموعة القابلة للعدّ من العقد والمجموعة غير القابلة للعد من الأفرع. وأخص بالذكر هنا «ريتشارد شليغل»، الذي ذكر في كتابه المهم، «الكمال في العلم»، عبارتين خاطئتين حول مواضيع تتضمن الشجرة الثنائية. ولأن هذين الخطأين يتعلقان بنقاشنا، سأورد نقاشاً لهما.

في العبارة الأولى، يناقش شليغل أنه إذا كانت المادة قابلة للقسمة إلى ما لانهاية، عندها سيوجد عدد غير قابل للعدّ من الجزيئات في كل قطعة من المادة[7]. لكن هذا غير صحيح أبداً. لأنه إذا اعتبرنا الشجرة الثنائية اللانهائية تمثيلاً لقطعة من المادة القابلة للقسمة إلى ما لانهاية، ستختلف عندها الأجزاء التي تعود للعقد عن الأجزاء التي تعود للأفرع. وقع شليغل بالخطأ عندما افترض أنه يوجد جُسيم لانهائي في نهاية كل «متتالية-أوميغا» من الانقسامات، وكان من الأفضل منطقياً التوقع بأن في نهاية كل «متتالية-أوميغا» من الانقسامات لن يوجد أي مادة على الإطلاق، بل مكان مجرد.

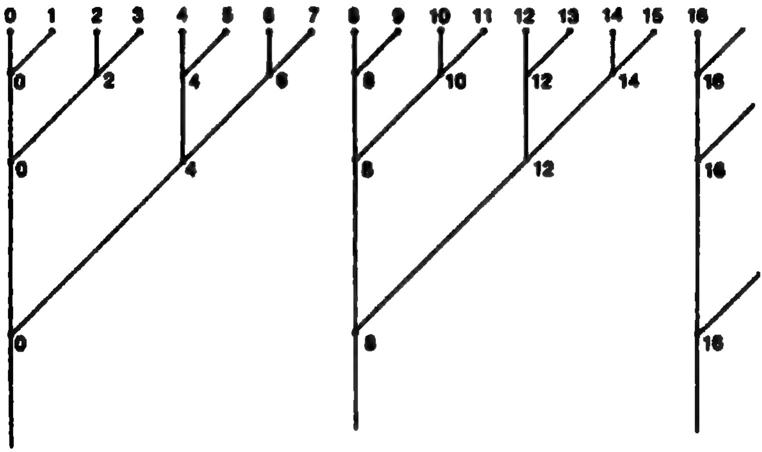
ناقش شليغل أيضاً الحالة الثابتة للكون. يقول الافتراض بالحالة الثابتة للكون إن ذرات هيدروجين جديدة تظهر عفوياً في الفضاء الفارغ. ويمكننا التعبير عن هذا الافتراض بالقول: إن الذرات تعيد إنتاج ذاتها بالانشطار النووي. وهذا يعني أنه إذا قام أحدنا بالاحتفاظ بذرة هيدروجين في مكان آمن ومحكم الإغلاق، سيجدها بعد عام وقد أصبحت ذرتين. وفقاً للحالة الثابتة للكون، ليس هناك من بداية للزمن. بل الزمن أزلي. لذا، عبر عدد لانهائي من السنين، سنجد ذرات هيدروجين تعيد إنتاج ذاتها مراراً وتكراراً.

تسرَّع شليغل واستنتج مخطئاً (مفترضاً أننا في كون ثابت) بأننا في قمة شجرة مزدوجة، ولذا، يوجد عدد غير قابل للعد من الذرات، $2^{\aleph_0}$ من الذرات. يقود هذا إلى تناقض، لأنه لا يوجد متسع كافٍ في الفضاء الإقليدي لعدد غير قابل للعدّ من الذرات ذات الحجم المنتهي.

لكن مع كون ثابت وذرات تنقسم وماضٍ لانهائي، لن نكون في قمة شجرة ثنائية قياسية. بدلاً من ذلك، سنكون في قمة شكل من النوع الموضح

7- Richard Schlegel, *Completeness in Science* (New York: Appleton-Century-Crofts, 1967), p. 223.

في الشكل 81. (نلاحظ بالمناسبة أنه الشكل 16 ذاته لكنه مقلوب). ادعى شليغل مخطئاً أن المخطط البياني كما في الشكل 81 يجب أن يحتوي على $2^{\aleph_0}$ من النقاط عند خط القمة، لأن كل نقطة تتوضع فوق سلسلة لانهائية من الأشواك الثنائية. يكمن الفرق كله بين هذا المخطط والشجرة الثنائية هو أن المخطط مرسوم بالاتجاه المعاكس. سيوجد دائماً $\aleph_0$ من النقاط على كل خط من الشجرة العكسية في الشكل 81. عموماً، الخط ذو الترتيب n^{th} الممتد في الماضي، سيتضمن نقطة تقابل كل مضاعف من 2^n.



الشكل 81

عـودة إلى موضوعنا الأسـاس، لنتحقق من مجموعة مألوفة من المجموعات غير القابلة للعدّ، وهي مستقيم الأعداد الحقيقية. عموماً، يتكون العدد الحقيقي من إشارة زائدة أو ناقصة، مع رقم طبيعي K، وامتداد عشري $e \in 10^{\omega}$. وبذلك يكون شكل العدد الحقيقي هو: $\pm K.\ e_0\ \ e_1$ $e_2\ e_3$...، حيث كل e_i هي أحد الأرقام من 1 إلى 9. ونختصر شكل العدد الحقيقي أحياناً بكتابته $\pm K.e$.

يتميز هذا التمثيل للعددِ الحقيقي بخاصية مزعجة؛ وهي أن أي عدد حقيقي ينتهي بسلسلة لانهائية من التسعات يكون مساوياً لعدد حقيقي ينتهي بسلسلة لانهائية من الأصفار. على سبيل المثال:

$$10.23999\ldots = 10.24000$$

$$0.999\ldots = 1.0000$$

ويمكن تفسير هذه الخاصة جبرياً أو هندسياً.

يبدو التفسير الجبري سهلاً كما ذكرناه في قسم «من الفيثاغورية إلى الكانتورية». إن الحيلة تعمل لأن سلسلة من التسعات التي تتكرر $\omega+1$ مرة لا تزيد عن سلسلة من التسعات التي تتكرر ω مرة. أما التفسير الهندسي فهو كالتالي. إذا بدأنا من الصفر، وتابعنا بتكرار تسعة أعشار 10⁄9 من المسافة المتبقية إلى الواحد، فبعد ω من الخطوات سنصل إلى الواحد. وهذه بالضبط هي نسخة أخرى من مفارقة زينون، والتي يظهر فيها عادة ½ بدلاً من 10⁄9. توجد بعض المفاهيم حول مستقيم الأعداد ربما نفضل ألا نساوي تحتها العدد ...0.999 بالعدد ...1.000، والقول بدلاً من ذلك إن العددين لامتناهيين في الصغر، لكن الأول أقل من الثاني، (انظر قسم «اللامتناهي في الصغر والأعداد فوق الواقعية»)، لكننا لن نفعل ذلك الآن.

يمكن لنا أن نتجنب وجود مفهومين للعدد نفسه، وذلك بأن نعتبر R مجموعة كل الكائنات الرياضية من الشكل $\pm K.e$، حيث $K\in\omega$، و$e\in 10^{\omega}$، و لا تنتهي بسلسلة لانهائية من التسعات. نعرِّف المجموعة R عادة بأنها مجموعة كل النقاط على مستقيم. وهو بالفعل تعريف تصويري مفيد، لكن يجب ألا يؤخذ حرفياً. طالما أننا نتعامل مع مستقيم مثالي (على عكس المستقيم الفيزيائي)، فما من صعوبة في إيجاد نقطة مميزة موافقة لكل عدد حقيقي $\pm K.e$. لكن هناك بعض التساؤل عما إذا كانت مجموعة هذه النقاط التي نذكرها تشكل فعلاً مستقيماً مستمراً. سنوضح ذلك قليلاً.

يمثِّل «المنفصل» و«المستمر» جوانب مختلفة وأساسية من الكون الرياضي. ويمكننا الذهاب أبعد من ذلك والقول إن النصف الأيسر من الدماغ يقوم بعد الأجزاء، والنصف الأيمن يستوعب الامتداد المستمر للفضاء. وأذكر هنا البحث النفسي الأخير الذي يناقش فكرة «الدماغ المنقسم»، حيث يفترض أن النصف الأيسر يتحكم بالعمليات الرقمية مثل الحساب واللغة؛ بينما يتحكم النصف الأيمن بالعمليات التحليلية مثل الغناء

وتصور الفضاء. وفي الجدول المذكور سابقاً في قسم «بداية التنوير»، يمكننا أن نضع النصف الأيسر في جانب «الكثرة»، بينما نضع النصف الأيمن في جانب «الواحد».

بقدر ما أن المجموعة هي اجتماع لعناصر منفصلة، فهي أساساً نوع منفصل من الأشياء. ولأننا نسمح لأنفسنا باستخدام مجموعات لانهائية، فبإمكاننا تمثيل النقاط على المستقيم بأجسام منفصلة. لكن يبقى هناك تساؤل عما إذا كان المستقيم فعلاً عبارة عن مجموعة من النقاط المنفصلة.

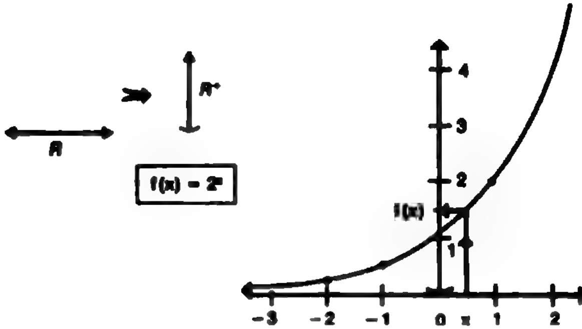
كما ناقشنا سابقاً في قسم «اللامتناهي في الصغر والأعداد فوق الواقعية»، تلامس مفارقة زينون هذه النقطة. تقول المفارقة، إذا أطلقنا سهماً في الفضاء، سيجتاز السهم المسافة المحددة في دقيقة مثلاً. لنقل إن هذا الامتداد الزمني المستمر هو فعلاً مجموعة من اللحظات الآنية المتتابعة باستمرار. وبما أن الحركة ليست خاصية آنية، سيكون السهم متوقفاً في أي من هذه اللحظات. إذاً، السهم لا يتحرك أبداً. فكيف له أن يقطع المسافة من هنا إلى هناك؟

في الواقع، توجد طريقة لذلك لم أرها منشورة من قبل: وفقاً للنسبية الخاصة، يختبر السهم خلال حركته انكماشاً طولياً نسبياً يتناسب مع سرعته. إذاً في الواقع، حالة حركة السهم تُلاحظ آنياً! إن السؤال الأساس هو كيفية صنع مستقيم مستمر من نقاط بدون بقايا. والحل الثوري هو الموضح في القسم «اللامتناهي في الصغر والأعداد فوق الواقعية»، هي فكرة المستقيم المستمر المطلق الذي لا يمكن استيعابه بأي مجموعة من النقاط المنفصلة، مهما بلغ كبر هذه المجموعة.

لكننا سنتابع بتمثيل R بمستقيم، مع التذكير بعدم اعتماد هذه الصورة جدياً. ما هو العدد الأصلي لـR؟ (ما عدد عناصر المجموعة R؟) نلاحظ قبل كل شيء، أن $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{R^+}}$، حيث R^+ هي المجموعة التي تضمّ كل الأعداد الحقيقية الأكبر من الصفر. تُختصر هذه الحقيقة بالتابع f المُعطى بالعلاقة $f(x) = 2^x$، لأن هذا يمنح f مخططاً بيانياً بتناظر واحد لواحد من R إلى R^+. إذا كان $(0،1)$ هي المجموعة $\{x \in R : 0 < x < 1\}$، والتي تضمّ كل الأعداد الحقيقية من الصفر إلى الواحد، عندها نجد أن $\overline{\overline{R^+}} = \overline{\overline{(0,1)}}$. يتمّ

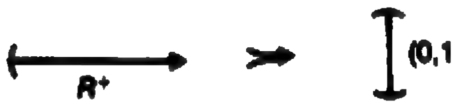
ذلك باعتبار التابع g الذي يرسم مخططاً واحد لواحد من R^+ إلى $(0,1)$. G معرَّفاً بالتابع $g(x)=1/1+x$.

x	f(x)
−4	1/16
−3	1/8
−2	1/4
−1	1/2
0	1
1/2	$\sqrt{2}$
1	2
2	4

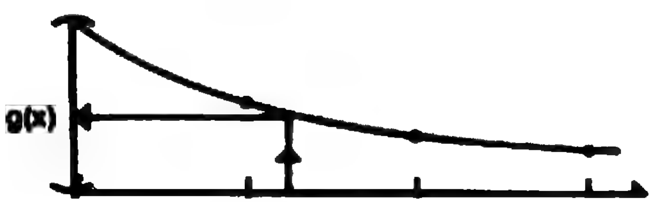


الشكل 82

x	g(x)
1/10	10/11
1	1/2
2	1/3
3	1/4



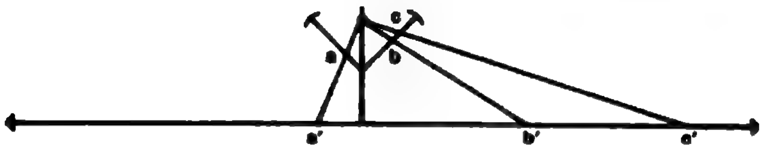
$$\boxed{g(x) = \frac{1}{1+x}}$$



الشكل 83

إذاً، تحتوي أي قطعة مستقيمة عدد النقاط نفسه الذي يحتويه المستقيم بأكمله. ويمكن إثبات ذلك بطريقة أكثر مباشرة. لنفرض أننا أخذنا قطعة

مستقيمة وقمنا بحنيها بزاوية قائمة على شكل الحرف V، ووضعنا رأس الزاوية في النقطة $1-\sqrt{1/8}$ على المحور y. والآن، برسم خطوط من النقطة 1 على المحور y تمرّ عبر هذا الشكل وعبر مستقيم الأعداد الحقيقية اللانهائي، يمكننا وصل كل نقطة من القطعة المستقيمة إلى نقطة من المستقيم اللانهائي. أي نقطة b أو c من القطعة المستقيمة تتوافقان مع النقطتين b' و c' من مستقيم الأعداد، وأي نقطة a' من مستقيم الأعداد تتوافق مع نقطة a من القطعة المستقيمة.

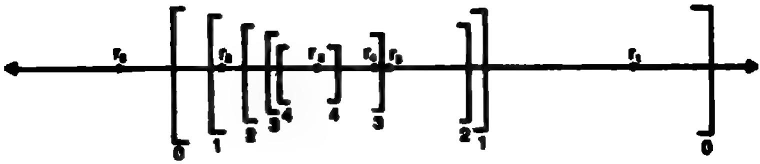


الشكل 84

يظهر هنا السؤال عن العدد الأصلي للمستقيم. لكننا سنستخدم الآن الرمز «c» رمزاً للعدد الأصلي للمجموعة R. من الواضح أن $c > \aleph_0$. كان كانتور أول من أثبت ذلك، في السابع من كانون الأول من عام 1873. ونعرف ذلك من الرسالة التي أرسلها إلى صديقه ديديكايند في اليوم التالي، والتي يذكر له فيها هذا الإثبات[8]. كان إثبات كانتور الأول عن عدم قابلية الأعداد الحقيقية للعدّ يختلف عن الحجة القطرية التي تُستخدم الآن، وسنوضح هذا الإثبات برسم بسيط. وتُعتبر حقيقة عدم وجود مخطط واحد لواحد بين مجموعتي الأعداد الطبيعية والأعداد الحقيقية، R وN، أول حقيقة مثيرة للاهتمام حول الأعداد الأصلية فوق المنتهية، من الصحيح القول إن نظرية المجموعة ولدت في ذلك اليوم من كانون الأول، قبل قرن من الزمان.

8- تظهر الرسالة في: *Briefwechsel Cantor–Dedekind* (Paris: Hermann, 1937), edited by E. Noether and J. Cavailles.

كنت أحد الأشخاص النادرين الذين لاحظوا ما يمكن أن ندعوه الذكرى المئوية لنظرية المجموعة في 7 كانون الأول عام 1973. انظر رسالتي في: *Notices of the American Mathematical Society* 20 (November, 73), p. 362.



الشكل 85

لكي نثبت أنه لا توجد قائمة قابلة للعدّ وشاملة لكل الأعداد الحقيقية، علينا إظهار أن مقابل أي مجموعة قابلة للعدّ من الأعداد الحقيقية من الشكل $\{r_n = n \in N\}$، لدينا عدد حقيقي d يختلف عن كل الأعداد التي تحتويها هذه المجموعة. من السهل هنا استحضار إثبات كانتور، إلا أن معرفة نظرية هيني-بورل ضروريةٌ لاستيعاب كامل لهذا الإثبات.

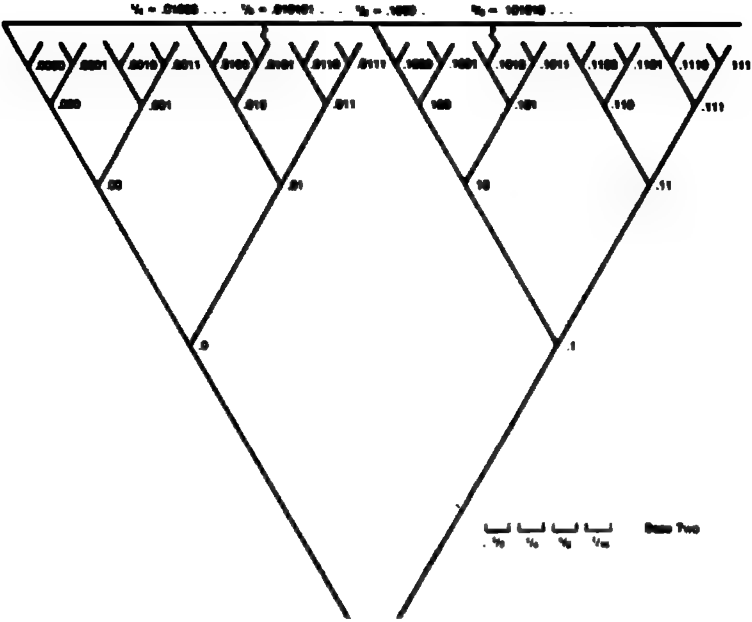
يتبع إثبات كانتور الخطوات التالية: إيجاد مجموعة مغلقة لا يمكنها احتواء r_0، ثم إيجاد مجموعة مغلقة فرعية لا يمكنها احتواء r_1، ثم المتابعة على هذا المنوال ليتكون لدينا متتالية شبكية لانهائية من المجموعات المغلقة، والتي تُحتوى كل منها في تاليتها. والآن، لتكن d نقطة تقع في تقاطع كل هذه المجموعات المغلقة، إن d هو عدد حقيقي يختلف عن جميع ما سبق.

إن لم تكن c هي ألِف-صفر، فأي من الألِفات هي إذاً؟

إن مسألة أي من الألِفات تناسب c هي ما يدعى بمشكلة الاستمرارية، والإصرار أن c هي ألف-واحد يدعى بفرضية كانتور للاستمرارية، أو اختصاراً CH. آمن كانتور بقوة أن c تساوي ألف-واحد. اعتقد كورت غودل لبعض الوقت أن c تساوي ألف-اثنان، ومنذ بضع سنوات كتب دي. إيه. مارتن ورقة تقترح أن c هي ألف-ثلاثة[9]. لكن ما من أحد يعرف حقاً. أنا نفسي أعتقد أن $c = \Omega^+$.

9- David Anthony Martin, «Hilbert's First Problem: The Continuum Hypothesis», in F. Browder, ed., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII* (Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1976), pp. 81–92.

سأؤجل النقاش في مسألة الاستمرارية بعض الوقت. كما قد يتوقع القارئ، فإن $c = 2^{\aleph_0}$، وأودّ أن أثبت لكم هذه الحقيقة. إن أسهل طريقة لإثبات ذلك هي النظر إلى الشكل 86.



الشكل 86

إذا اعتبرنا أن القطعة المستقيمة الأفقية أعلى الشجرة هي القطعة [0, 1] والتي تساوي $\{x \in R{:}0 \leq x \leq 1\}$، فإن بإمكاننا التفكير في كل ممر خلال الشجرة الثنائية على أنه يوافق نقطة فريدة على هذه القطعة. عموماً، من اليسير رؤية متتالية $s \in {}^{\omega}2$ تولِّد ممراً عبر الشجرة يوصل إلى النقطة $s_0/2+s_1/4+...+s_n/2^{n+1}+...$. وإذا حاولنا تدوين الثنائية، فيمكن كتابة ذلك على نحو أسهل: $.s_0s_1s_n...2$. حيث 2 تعني أننا نفسِّر الامتداد على أساس القوة 2 بدلاً من القوة 10.

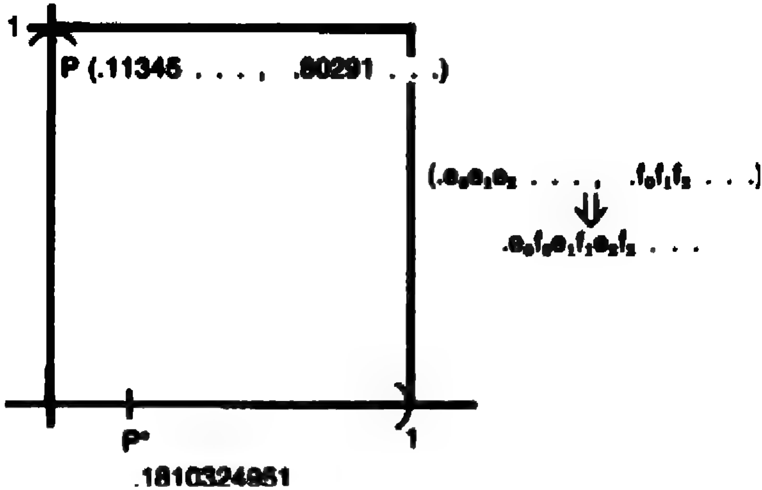
هنا طريقة توافق العناصر المتعددة لـ $^{\omega}2$ لعناصر المجموعة المغلقة [0, 1]. لسوء الحظ، المخطط الذي يصل كل $s \in {}^{\omega}2$ إلى $s_{TWO} \in [0,1]$

ليس مخططاً واحداً لواحد. فمثلاً، $.1000_{TWO} = ½ = .0111..._{TWO}$، وهنا تظهر مفارقة زينون مرة جديدة! لكن إذا تجاهلنا المجموعة التي تضمّ كل عناصر 2^{ω} والتي تنتهي بتكرار لانهائي من الرقم واحد، عندها سيصبح المخطط متناظراً واحد لواحد. يبدو من الممكن تجاهل هذه المجموعة لأنها قابلة للعدّ، ولأن كلاً من 2^{ω} والمجموعة المغلقة $[0, 1]$ غير قابلتين للعدّ. لذا، بدون الخوض بالمزيد من التفاصيل، ندَّعي أن $c = 2^{\aleph_0}$.

كان كانتور أول من اعتقد أن العدد الأصلي c -أي عدد عناصر- لمستقيم الأعداد الحقيقية يساوي $\aleph_1$، وأن العدد الأصلي لمجموعة كل النقاط في مستوٍ يساوي $\aleph_2$، والعدد الأصلي لمجموعة كل النقاط في المستوي الثلاثي الأبعاد في الفضاء يساوي $\aleph_3$، وهكذا. لكن يظهر أن هذا التابع المستمر أو المجموعات المستمرة من النقاط، تملك العدد الأصلي نفسه c. رسمياً، يمكننا الاكتشاف بسرعة أن المستوي يملك c من النقاط. لماذا؟ حسناً، لأن المستوي هو مجموعة من الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية:

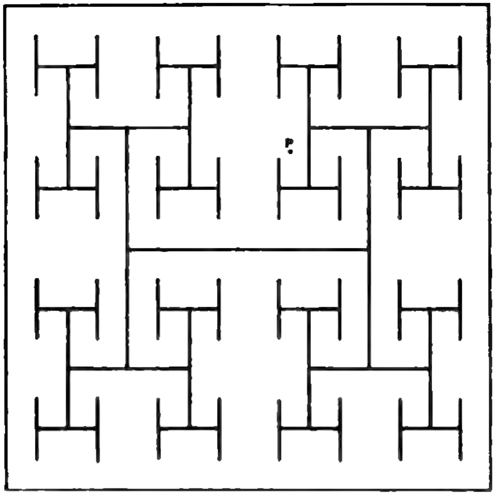
$$c = 2^{\aleph_0} . 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = c\,.$$

يجب أن نقدِّم إثباتاً مادياً إذا أردنا أن نرسم مخططاً بيانياً من النوع المتناظر واحد لواحد بين مجموعة النقاط داخل الوحدة المربعة (بما فيها النقاط الموجودة على الضلعين الأيسر والأسفل، وباستثناء النقاط الموجودة على الضلعين الأعلى والأيمن) ومجموعة النقاط في المجموعة نصف المفتوحة $[0,1)$. تكمن الحيلة في التطابق بين نقطة P في الوحدة المربعة ونقطة P^* في المجموعة نصف المفتوحة، حيث نحصل على الامتداد العشري لـP^* عن طريق *انزياح* الامتدادات العشرية لاثنين من الإحداثيات لـP. يمكن أن ندمج اثنين من عناصر $[0, 1)$ للحصول على عنصر واحد من المجموعة نفسها لأن $2.\omega = \omega$. الآن، ليس من الصعب إدراك أن المستوي مصنوع من $\aleph_0$ من نصف الوحدة المربعة -كما ذكرنا سابقاً- وأن المستقيم يتكون من $\aleph_0$ من القطع المستقيمة نصف المفتوحة، إذاً للمستوي والمستقيم العدد الأصلي نفسه.



الشكل 87

يوجد توافق أكثر بصرية وأقل منطقية بين نقاط القطعة المستقيمة ونقاط المربع. نبدأ مع القطعة المستقيمة. ثم نعبر إلى مجموعة كل الممرات عبر الشجرة الثنائية، كما يشير الشكل 86. إذا قمنا بهزّ الشجرة قليلاً، ستغطي مجموعة الممرات في الشجرة وحدة مربعة. وإذا تحركنا إلى الأسفل بالترتيب مع تدوير كل شوكة 90 درجة حول العمود، ثم نظرنا من الأعلى إلى الأسفل إلى ما حصلنا عليه، سيكون مشابهاً للشكل 88. توجد طريقة أخرى للتفكير في هذه الصورة، وهي تخيل شجرة الاختيار تسقط للأسفل نحو حقل مربع، وتصنع بدائل من القرارات شرق-غرب وشمال-جنوب. على سبيل المثال، لنصل إلى النقطة *P*، يمكن أن نبدأ بـ ⟨شمال، غرب، جنوب، غرب، شمال شرق،...⟩. يمكن تمييز متتالية الاختيارات بسهولة بالأرقام ⟨1,1,0,0,0,1,...⟩ من 2^ω، مع الفهم أن الفتحات الزوجية للأصفار هي غرب والواحد هي شرق، والفتحات الفردية للأصفار هي جنوب والواحد هو شمال.



الشكل 88

يمكن أن يمتد هذا النوع من النقاش لنظهر أن مجموعة نقاط الوحدة المكعبة تملك القياس، لأي موقع في المكعب يمكن تحديده بـ «متتالية–ω» من الشجرة الثنائية بدلاً من شرق–غرب، شمال–جنوب، أعلى–أسفل.

عرفنا الآن أن مجموعة نقاط القطعة المستقيمة الرياضية كبيرة لدرجة تساوي فيها نقاط مستوٍ رياضي لانهائي. وإذا كان نظام الأعداد الحقيقية يلتقط فعلاً جوهر الاستمرارية، فهذه القطعة (–) تحوي عدداً من النقاط مماثلاً لعدد نقاط الزمكان في المكان والزمان اللانهائيين. ويمكن للعدد الأصلي لهاتين المجموعتين أن يُدعى c أو $2^{\aleph_0}$، ونعرف أن هذا العدد الأصلي أكبر من $\aleph_0$.

لا بدّ لنا الآن من مواجهة السؤال التالي: أي من الألِفات تساوي c؟ التفكير السطحي يتوقع أن c تساوي إحدى الألِفات لأن $c = 2^{\aleph_0}$، وهناك شعور بأنه عندما يكون الأس عدداً أصلياً فسينتج لدينا عدد أصلي آخر. لكن العدد $2^{\aleph_0}$ لا يُعرّف فعلاً بأي طريقة تقود طبيعياً إلى ألِف محددة. وهذا معاكس للحين الذي يكون فيه الأس عدداً ترتيبياً: $2^{\omega} = lim 2^{n} = \omega$.

يقول التبرير المعتاد للاعتقاد بوجود ألِف ما تساوي c: تخيل أنك تمشي خلال الأعداد الترتيبية مع مستقيم الأعداد الحقيقية R بيدك اليسرى. في كل مرة تعبر عدداً ترتيبياً، التقط نقطة من المستقيم. لنقل إن النقطة r_y هي نقطة من المستقيم تلتقطها عندما تعبر العدد y. الآن، R هي مجموعة، و On هي اللانهاية المطلقة، لذا ستنفذ الأعداد الحقيقية منك قبل أن تنفذ الأعداد الترتيبية. وبعبارة أخرى، ستوجد مجموعة $\rho = \{r_y : y \in \rho\}$ تستنفذ R. من الواضح أن العدد الأصلي لـR هو أصغر مجموعة ρ يمكن أن تحقق $\{r_y : y \in \rho\}$. نلاحظ أن هذه المجموعة ρ يجب أن تكون عدداً أصلياً، أي إن ρ سيكون ألِف $\aleph_a$ لعدد ترتيبي a. إذاً سنصل إلى أن $c = \aleph_a$.

هناك نقطتا ضعف في هذا النقاش. أولاً، يمكن أن تكون بنية مجموعة الأعداد الحقيقية R متماثلة جداً لدرجة لا يمكن معها الاستمرار باختيار عناصر منها إلى أجل غير مسمًّى. يمكن لهذا أن يحدث، على سبيل المثال، إذا وُجدت مجموعة $I \subseteq R$ من غير المتمايزات، وهي عناصر تتشابه فيما بينها في جميع الخصائص فلا يمكن تمييزها عن بعضها البعض.

يمكن الردّ على ذلك بأنه بغض النظر عن الاعتماد على قاعدة ما، فمن الممكن نظرياً استمرار عملية التقاط عناصر من R إلى ما لانهاية. إن وجود المجموعات لا يعتمد على وجود قواعد أو أسماء أو أوصاف. وبما أنه من الممكن نظرياً أن نربط كل عدد حقيقي مع عدد ترتيبي إلى أجل غير مسمًّى، فلا بد من وجود مجموعة تقوم بذلك. حسناً.

ماذا عن الاعتراض الثاني حول أن $c = \aleph_a$ لـa محددة؟ يقول الاعتراض إن من الممكن ألا تنفذ الأعداد الحقيقية، من الممكن أن تكون $c \geq \Omega$. من الواضح أن اكتشاف أعداد حقيقية جديدة عمليةٌ لا تنتهي، وأن مجموعة قوى أوميغا $P\omega$ هي لانهاية مطلقة. لكن الفكرة هنا أن كون نظرية المجموعة يختبر نمواً أفقياً لانهائياً (بإضافة المزيد من الأعداد الحقيقية)، ونمواً عمودياً لانهائياً أيضاً (بإضافة المزيد من الأعداد الترتيبية). في هذه الحالة، لن تكون $P\omega$ و R و 2^ω مجموعات بالمعنى المعتاد للكلمة، وسيزداد الأمر غموضاً بالنسبة لـPR.

لكن الأمر يبدو غير طبيعي لأننا نميل كثيراً إلى الشعور بأن $\{y : y \subseteq \omega\}$ هي مجموعة، أي «كثرة تسمح بالتفكير بها كواحد».

باختصار، يمكن أن يكون:

$c = \aleph_\alpha$ لعدد ما α؛

أو $c \neq \aleph_\alpha$ لأي عدد α لكن تبقى $P\omega$ مجموعة؛

أو $c \geq \Omega$ و $P\omega$ ليست مجموعة.

يتم استبعاد الاحتمالين الأخيرين غالباً بالتفسيرين التاليين على الترتيب: بديهية الاختيار، وبديهية قوة المجموعة.

تشكِّل هاتان البديهيتان جزءاً من بديهيات تسيرميلو-فرانكل (نظرية المجموعة حسب تسيرميلو وفرانكل)، والتي تُعرف بـ*ZFC*. ومن الكافي هنا القول إن هذه البديهيات تضم أكثر المعتقدات الرياضية انتشاراً حول المجموعات. إذا وافقنا على الاعتقاد بهذه البديهيات، فيمكننا إثبات أن هناك عدداً ترتيبياً α يحقق $c = \aleph_\alpha$.

تُدعى c أحياناً بـ«أصلية الاستمرارية»، لأن كلمة «الاستمرارية» تعني المجال المستمر من الفضاء الرياضي، مثل المستقيم، أو المساحة، أو الحجم. في عام 1883، نشر كانتور الملاحظة التي أمل أن تتسبب سريعاً بالوصول إلى أن أصلية الاستمرارية هي الفئة الثانية من الأعداد ذاتها[10]. تُدعى هذه الفرضية، $c = \aleph_1$، بفرضية الاستمرارية *CH*. لكن كانتور لم يتمكن أبداً من إثباتها.

في عام 1940، تمكَّن كورت غودل من إثبات أن فرضية الاستمرارية *CH* تتسق مع فرضية تسيرميلو-فرانكل *ZFC*. وأظهر أنه لا يمكن إثبات أن $c \neq \aleph_1$ من بديهيات *ZFC*[11]. لكن ذلك لا يعني أن كانتور كان محقاً، بل يعني أنه ليس مخطئاً فحسب.

في عام 1963، أثبت بول كوهين أن نفي *CH* يتسق مع *ZFC*. وأظهر عدم

10- *Gesammelte Abhandlungen*, p. 192.

11- Kurt Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis* (Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1940).

إمكانية إثبات $c \neq \aleph_1$ من بديهيات[12]. ولا يعني ذلك أن كانتور كان مخطئاً، بل يعني أننا غير قادرين على إثبات صحة فرضيته اعتماداً على بديهيات ZFC فحسب.

يمكن تلخيص هذه الإثباتات بإيجاز كما يلي. وصف غودل كوناً محتمَلاً تكون فيه كل بديهيات ZFC صحيحة، ويصح فيه أن $P\omega = \aleph_1$. يُدعى هذا الكون L، «كون المجموعات القابلة للإنشاء». من ناحية ثانية، وصف كوهين أكوان متعددة محتمَلة تصحُّ فيها كل بديهيات ZFC، ويصح أيضاً أن يكون $\overline{\overline{P\omega}} = \aleph_2$ أو $\aleph_3$ أو $\aleph_{\omega+10}$، أو تقريباً أي شي آخر. لكن، لا يُعتقد أن أياً من هذه الأكوان هو الكون الحقيقي لنظرية المجموعة، لكن وجودها يظهِر أنه طالما توجد بديهيات ZFC، لا يمكن إثبات CH أو نفيها.

يشبه هذا الوضع تقريباً السؤال عما فعلته سكارلت أوهارا في نهاية «ذهب مع الريح»... يمكن للمرء أن يكتب أنها عادت إلى ريت، أو يكتب أنها لم تره مطلقاً بعد ذلك. لكن الرواية بحد ذاتها لا تعطينا معلومات تكفي لتأكيد أي من هذين الاحتمالين. وبالطريقة ذاتها، لا تعطينا ZFC وصفاً كافياً لـ «كون نظرية المجموعة» يمكّننا من معرفة قوة الاستمرارية فيه.

منذ عام 1963، ظهرت عدة بديهيات يمكن إضافتها إلى بديهيات ZFC. لكن البديهيات الوحيدة التي قُبلت على نحو واسع كانت بديهيات متعددة حول اللانهاية (والتي ستُشرح في القسم القادم)، وبديهية تُدعى «بديهية مارتن»، نسبة لـ أ. د. مارتن والذي كان أول من استخدمها، وكذلك ر. م. سولوفاي. لكن لم تستطع أي من هذه البديهيات تحديد قيمة c.

في أواخر الستينيات من القرن الماضي، اقترح كورت غودل بعض البديهيات التي يمكن أن تحدّد حجم ، وتُعرف ببديهيات «مربع أوميغا» و«مربع ألِف–واحد». تقول بديهية «مربع أوميغا» إن هناك مجموعة $S \leq {}^{\omega}\omega$ حيث $\bar{\bar{S}}=\aleph_1$، ولكل $f \in {}^{\omega}\omega$ يوجد $f \in S$ حيث $f <_{\text{bep}} g$، كما عرَّفنا سابقاً في قسم «الأعداد فوق المنتهية».

12– Paul J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (New York: Benjamin, 1966).

كان الاعتقاد في البداية بأن هاتين البديهتين، مع بعضها البعض، تتضمن أن $c = \aleph_2$. لكن غايسي تاكوتي أظهر بعد ذلك أننا اعتماداً عليها فحسب يمكننا إثبات أن $c = \aleph_1$[13]. أما في وقتنا الحاضر، لا تنتشر أي بديهيات تتضمن أن $c \neq \aleph_2$، لذا من المتوقع أن تُقبل فرضية كانتور للاستمرارية *CH* في المستقبل.

يمكن للمرء أن يعتقد ببساطة أننا إذا فكرنا بـc و $\aleph_1$ فيمكننا معرفة إذا كانت فرضية الاستمرارية صحيحة أم لا. في عام **1943**، قام «واكلو سيربينسكي»[14] بتأليف كتاب يضمّ ثمانية وثمانين عبارة معادلة لـ*CH*[15]. لكن ليست أي من هذه العبارات صحيحة أو خاطئة. مع ذلك، ادّعى كورت غودل في مقالته الشهيرة «ما هي مشكلة كانتور للاستمرارية؟»[16] في عام 1947، أن فرضية الاستمرارية تضم تكافؤات «غير قابلة للتصديق»[17].

لطالما كنت مفتوناً بالنهج التالي لمسألة الاستمرارية[18]. لنعرِّف المجموعة *HC* بأنها مجموعة «مجموعة قابلة للعدّ وراثياً». نقول إن المجموعة x في المجموعة *HC* إذا وفقط إذا كانت x قابلة للعد وعناصرها كلها في *HC*. تمثِّل المجموعة *HC* ما يمكن أن يكون عليه كون نظرية المجموعة، V، إذا لم توجد المجموعات غير القابلة للعدّ. ليس من الصعب

13- Gaisi Takeuti, «Gödel Numbers of Product Space», in Gert H. Müller and Dana S. Scott, eds., *Higher Set Theory* (Heidelberg: Springer Lecture Notes #669, 1978).

14- واكلو سيربينسكي، (1882، 1969)، عالم رياضيات بولندي. عُرف بمساهماته في نظرية الاستمرارية. سُمّيت ثلاثة أشكال كُسيرية باسمه وهي: مثلث سيربينسكي وسجادة سيربينسكي ومنحني سيربينسكي. (المُترجِمة).

15- Woclaw Sierpinski, *Hypothèse du Continu*, (Warsaw, Poland: Monografie matematyczne, 1934).

16- *What is Cantor's Continuum Problem*? by Kurt Godel. (المترجمة).

17- انظر: Benacerraff and Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics*, p. 267.

18- Rudy Rucker, «On Cantor's Continuum Problem», *Journal of Symbolic Logic 41*, p. 551. ليس هذا البحث بكامله، بل هامش فحسب. يمكن إيجاد وصف آخر لأفكاري عن نظرية الاستمرارية في روايتي: *White Light*, pp. 34–36.

أن نظهِر أن $c = \overline{\overline{HC}}$. بالنسبة إلى الكون الصغير نسبياً HC، تكون On، فئة كل الأعداد الترتيبية، هي $\aleph_1$. لذا يمكن أن نعبِّر عن مسألة الاستمرارية: «بالنسبة إلى الكون HC الذي يضمّ المجموعات القابلة للعدّ وراثياً، هل يمكن أن يتحقق $\overline{\overline{On}} = \overline{\overline{V}}$؟» أي هل حجم «كل شيء» يساوي حجم «اللانهاية المطلقة»؟»

قد تبدو هذه الصيغة بعيدة الاحتمال، لكن يمكن أن يكون أحد أسباب عجز نظرية المجموعة أمام مسألة الاستمرارية، هو أننا لم نحاول بما فيه الكفاية لتعريف مسألة الاستمرارية من جوانب خارج الرياضيات الصافية.

الأصول الكبيرة

إذا تحدثنا نظرياً، فإن العدد الترتيبي هو عدد يمكن «العد للوصول إليه» من خلال عملية تكرار اتخاذ خطوة تلو الخطوة التي تسبقها. وعادة، يُعرَّف العدد الترتيبي a بالمجموعة $\{b{:}b < a\}$ التي تضمّ كل الأعداد الترتيبية الأقل من . وذلك لأن مجرد استيعاب مجموعة الخطوات كوحدة، يُوجِد تلقائياً الخطوة المفردة التالية، ، كشيء مُعرَّف. بالتالي، إن عملية استيعاب أول عدد ترتيبي لانهائي مشابهة تماماً لعملية تشكيل كثرة الأعداد الترتيبية النهائية جميعها في وحدة، أو في مجموعة $\{0,1,2,\ldots\}$. وتوجد ω كمفهوم مفرد ذي معنى يطابق الامتداد الذي يمكن أن يصل إليه وجود كل الأعداد الطبيعية مع بعضها البعض كمجموعة واحدة موحَّدة.

لنتخيل اصطفاف كل الأعداد الترتيبية الواحد تلو الآخر في طريق يصل إلى... أين؟ بالنسبة لي، أعتمد على الرمز أوميغا الكبيرة Ω للإشارة إلى نهاية هذا الطريق؛ إلى العدد الترتيبي الأخير؛ إلى اللانهاية المطلقة. «الذي لا يمكن استيعاب ما هو أكبر منه». إذا كانت Ω هي On فعلاً العدد الترتيبي الأكبر، فعندها تكون مجموعة كل الخطوات أو الأعداد الترتيبية قبل Ω هي On فحسب: فئة كل الأعداد الترتيبية. توجد Ω كمفهوم مفرد ذي معنى مماثل للامتداد الذي توجد فيه الأعداد الترتيبية مع بعضها البعض ككيان واحد موحَّد. لكن ذلك يبدو امتداداً أصغر.

إذا وُجدت Ω كخطوة واحدة معرَّفة يمكن الوصول إليها بتكرار «اتخاذ الخطوة التالية»، فعندها ستكون عدداً ترتيبياً، أي إن $\Omega > \Omega$، لأن أي عدد ترتيبي أصغر من Ω. لكن لا يمكن لأي عدد ترتيبي أن يكون أصغر من نفسه.

وبعبارة أخرى، يمكن القول إن On لا يمكن أن تكون مجموعة، بسبب وجود العديد من الأعداد الترتيبية التي لا يمكن من حيث المبدأ أن توجد مع بعضها البعض في كينونة واحدة موحَّدة.

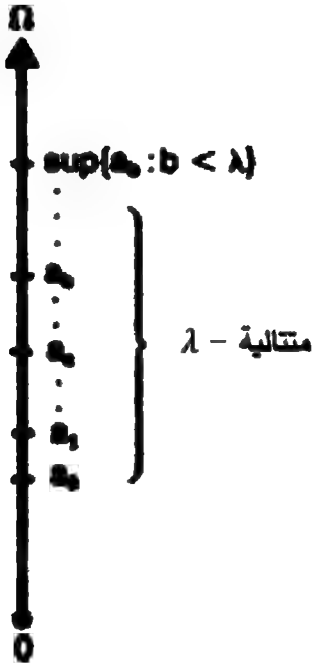
إذاً، هناك إحساس قوي بأن Ω ليست فعلاً عدداً ترتيبياً، وأن On ليست كثرة موحَّدة. لكن مهلاً... ما زال بإمكاني أن أسمِّي الرموز Ω وOn على نحو اعتيادي، ويبدو من المنطقي القول «إن Ω تملك خاصية»، وذلك بالرغم من أننا ذكرنا للتو أنها ليست عدداً ترتيبياً. لِمَ لا نتحدث عن Ω على أنها توجد ككائن مُعرَّف ومفرد، كنوع من الأعداد الترتيبية التخيلية. بالتأكيد، ليست Ω عدداً ترتيبياً لأنها كبيرة جداً. لكن اتضح أن معظم خصائص الأعداد الترتيبية تنطبق عليها.

إن النقاش حول Ω من أكثر الأمور فائدة وفعالية بالنسبة لمنظِّري نظرية المجموعة. عاد هذا النقاش إلى دائرة الاهتمام في السنين العشر الأخيرة، بعد أن بدأه سابقاً جورج كانتور، صاحب نظرية المجموعة. ويبدو هذا النقاش مثيراً للاهتمام، خاصة في ضوء فكرة أن Ω بحدِّ ذاتها لا توجد على نحو حرفي. وتُعتبر حقيقة إمكانيتنا النقاش حول أمور غامضة مثل اللانهاية المطلقة من أكثر أسئلة نظرية المجموعة جمالاً وعمقاً. وأشير هنا إلى أن هذا السؤال عبارة عن نسخة أخرى من مسألة الكثرة والواحد. إن Ω كشيء غير قابل للاستيعاب، كثرة؛ أما كفكرة واحدة فهي واحد.

سنناقش في هذا القسم الأعداد الأصلية الكبيرة، وهي أعداد ترتيبية تتشارك العديد من الخصائص مع Ω. وعموماً، كلما ازدادت الخصائص التي يتشارك بها عدد ترتيبي ما مع Ω، كلما كان هذا العدد أكبر.

نتذكر أننا نقول عن عدد ترتيبي ما إنه عدد أصلي إذا لم يكن لدينا $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}}$ لأي عدد b يسبق a. وكما قلنا سابقاً، بما أن Ω عدد ترتيبي متخيَّل، فهي أيضاً عدد أصلي. ولأنه إذا كانت b أحد الأعداد التي تسبق Ω، فلا نتوقع أن يتحقق $\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\overline{b}}$، فذلك يعني وجود تابع تبادلي f من b إلى On، أي $On = \{f(a) : a < b\}$، مما يقود إلى استنتاج متناقض بأن On توجد كمجموعة، كوحدة محددة بالوحدة b والتابع f. لذا يجب أن تكون Ω عدداً أصلياً.

يمكن أن يمتد هذا النقاش لنصل إلى استنتاج مفاده أن Ω عدد أصلي عادي، أي لا يمكن كتابته كمجموع لأعداد ترتيبية أقل منه. إن لم تكن Ω عدداً عادياً، لوُجد عدد ترتيبي λ ومجموعة $\{a_b : b < \lambda\}$ حيث $\Omega = sup\{a_b : b < \lambda\}$. لكن ذلك يعني أنه يمكن تصور النهاية المطلقة من حيث المجموعات، وتحديداً على أنها أعلى مجموعة من الأعداد الترتيبية، وذلك يعارض الافتراض الأساسي بأن Ω يجب أن تتجاوز أي وصف ممكن من حيث المجموعات.



الشكل 88

قدَّمت نظرية تسير ميلو–فرانكل العبارة «Ω عدد عادي» على أنها افتراض واضح يُدعى *بديهية الاستبدال*. يمكن أن نعبِّر عن هذه البديهية بالقول إن صورة أي مجموعة بحسب تابع ما هي أيضاً مجموعة. ويأتي اسم بديهية الاستبدال من حقيقة أنه يمكن تشكيل صورة المجموعة باستبدال كل عنصر

منها بصورته حسب التابع. على سبيل المثال، تقودنا بديهية الاستبدال من الافتراض بأن أَلِف–واحد $\aleph_1$ هي مجموعة

$$\{0,1,2,\ldots\ \omega,\ldots\ \omega+\omega,\ldots\ \epsilon_0,\ldots a\}$$

$$\{\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\ldots\ \aleph_\omega,\ldots\ \aleph_{\omega+\omega},\ldots\ \aleph_{\epsilon_0},\ldots\ \aleph_a,\ldots\}$$

إلى الاستنتاج أن $\{\aleph_a : a \in \aleph_1\}$ هي أيضاً مجموعة، وهو استنتاج يؤكد أن

$$\aleph_{\aleph_1} = sup\{\aleph_a : a \in \aleph_1\}$$

مجموعة أيضاً.

الآن، من الواضح أن بديهية الاستبدال تقتضي أن Ω عدد عادي، لأنها تضمن ما يلي:

إذا كان λ عدداً ترتيبياً –وبالتالي مجموعة– وكان لكل $b \in \lambda$ يوجد عدد ترتيبي a_b حيث $\{a_b : b \in \lambda\}$، فإن a_b مجموعة؛ وأيضاً $sup\{a_b : b \in \lambda\}$ عدد ترتيبي ومجموعة أقل من Ω.

لكن بديهية الاستبدال تبدو ضعيفة أمام مبدأ الانعكاس: «لكل خاصية قابلة للإدراك تمتلكها Ω، يوجد عدد ترتيبي أصغر منها يشاركها هذه الخاصية». إن تفسير مبدأ الانعكاس بسيط للغاية؛ فإذا انفردت Ω بخاصية مميزة قابلة للإدراك دون سائر الأعداد الترتيبية الأخرى، فعندها تصبح Ω قابلة للإدراك أيضاً باعتبارها العدد الترتيبي الوحيد الذي يمتلك هذه الخاصية. لذا يجب على أي خاصية تمتلكها Ω أن تتشاركها مع عدد ترتيبي أصغر منها.

يُقصد بخاصية «قابلة للإدراك» أنه يمكن التعبير عنها بمجموعة من العبارات بلغة ما. لا يمكن أن نتوقع أن يصمد مبدأ الانعكاس أمام خاصية مثل «Ω هي فئة كل الأعداد الترتيبية»؛ فبالرغم من أنها عبارة صحيحة، إلا أنه لا يمكن لأي عدد ترتيبي أقل من Ω أن يمتلكها أيضاً. والفكرة هنا تكمن أن هذه الخاصية هي في الحقيقة غير قابلة للإدراك. لذا لا نعتبر قولنا إن Ω شيء فريد يضم كل الأعداد الترتيبية وصفاً لـ Ω بعبارات أبسط منها.

يمكن أن نصل إلى حقيقة أن Ω عدد عادي من مبدأ الانعكاس. لنأخذ عدداً

ترتيبياً ما $\lambda < \Omega$، وتابعاً يحدّد العدد الترتيبي a_b لكل ، نجد عندها أن Ω تحقق الخاصية «لكل $b < \lambda$، Ω أكبر من a_b». يمكن أن نقول عن هذه الخاصية إنها قابلة للإدراك، لأنها تقبل الشرح اعتماداً على ما هو أبسط منها. لذا يتحقق مبدأ الانعكاس، وتصح العبارة «لكل $b < \lambda$، يوجد عدد ترتيبي κ أكبر من a_b». لكن عندها نعلم أن $sup\{a^b : b < \lambda\} \leq \kappa < \Omega$، والذي يقتضي أنه لا يمكن الوصول إلى Ω عن طريق مجموعة عليا من الأعداد الترتيبية.

Ω ليست عدداً عادياً فحسب، بل إنها لا تملك الشكل κ^+ لأي عدد أصلي κ. ذلك يعني أن Ω ليست العدد الأصلي الأكبر من أي عدد أصلي آخر. يُعبَّر عن هذه الحقيقة أحياناً بالقول إن Ω هي نهاية عدد أصلي، بدلاً من القول إنها العدد التالي لعدد أصلي. إذاً، لا يمكن الوصول إلى Ω من الأسفل عن طريق أي متتالية أقصر من Ω، لأنها عدد عادي؛ ولا يمكن الوصول إليها من الأسفل عن طريق أي عملية مرور من κ إلى κ^+، لأنها نهاية عدد أصلي.

يُدعى العدد الأصلي الذي يمتلك هاتين الخاصتين بـ عدد أصلي متعذِّر الوصول أو «منيع». أي إننا نقول عن العدد ثيتا θ إنه عدد أصلي منيع إذا تحقق:

1. ثيتا θ عدد عادي،
2. أياً كان κ أقل من θ، فإن κ^+ أقل من θ أيضاً.

يحقق أَلِف–صفر $\aleph_0$ هاتين الخاصتين، فهو عادي وليس لاحقاً لأي عدد أصلي، لأن $\kappa < \aleph_0$ يعني أن κ منتهٍ وأن κ^+ هي $\kappa+1$. من الصعب إيجاد أي عدد أصلي منيع آخر. مثلاً، $\aleph_1$ عدد عادي، لكنه قابل للوصف على أنه $\aleph_0^+$. و $\aleph_\omega$ ليست مساوية لـ κ^+ بالنسبة لأي κ، لكن يمكن وصفه بالتالي: $sup\{\aleph_n : n \in \omega\}$.

الآن، Ω عدد أصلي منيع أكبر من $\aleph_0$، لذا إذا طبقّنا مبدأ الانعكاس سنصل إلى استنتاج مفاده أن هناك أعداداً أصلية منيعة أكبر من $\aleph_0$. يُعرف أول عدد أكبر من $\aleph_0$ بـ ثيتا θ. ولأن علماء الرياضيات يبدؤون العد عادة من الصفر بدلاً من الواحد، لذا تُدعى أوميغا ω العدد المنيع رقم 0، وثيتا θ العدد المنيع الأول.

إن θ عدد منيع لعدم إمكانية الوصول إليها من الأسفل. فلا نصل إليها عن طريق نهاية الأعداد الأصلية الأقل منها؛ ولا عن طريق الأعداد الأصلية المتلاحقة. وإذا تساءلنا أي أَلِف يساوي ثيتا، سنصل إلى جواب غير ذي فائدة بأن $\theta = \aleph_\theta$.

توجد طريقة مثيرة للاهتمام للتفكير بـθ، وهي المقارنة بين المتتاليتين:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \omega \quad \aleph$$

$$0 \quad \omega \quad \aleph_1 \quad \theta \quad \rho$$

توافق ω مكان 1 لأن هذين العددين يقعان في نقطتي الانتقال الأكثر أهمية: الانتقال من اللاشيء إلى شيء، والانتقال من النهاية إلى اللانهاية. تحت التعريف الأول للعدد العادي (κ عدد عادي إذا لم يكن مساوياً لمجموع أعداد ترتيبية عددها أقل من κ وقيمة كل منها أقل من κ أيضاً)، نجد أن جميع الأعداد الأصلية في المتتاليتين هي أعداد عادية.

يوافق $\aleph_1$ مكان 2 لأن $2=1^+$ و $\aleph_1=\omega^+$. إن 2 و$\aleph_1$ هما أول عددين نموذجيين أصليين عاديين ولاحقين لأعداد تسبقهما.

توافق θ مكان ω، لأن ω هي العدد الأصلي العادي الأول الذي يشكّل نهاية تسعى إليه الأعداد، و θ هي النهاية العادية الأولى بعد ω.

سنشرح معنى الرمز ρ، ويُلفظ «رو»، فيما يلي.

إن الهدف من هذا النقاش هو أن الانتقال من ω إلى $\aleph_1$ إلى θ يشبه الانتقال من 1 إلى 2 إلى ω. فكما أن ω هي الأصل اللانهائي الأول، كذلك θ هي العدد الأصلي الكبير الأول. (بالمعنى الذي تقصده نظرية المجموعة من كلمة «كبير»).

وفقاً لمبدأ الانعكاس، نجد أنه لأي خاصية قابلة للإدراك تملكها Ω، يوجد Ω من الأعداد الترتيبية الأصغر من Ω نفسها، والتي تملك الخاصية ذاتها. أو ستكون Ω قابلة للإدراك بالعدد الترتيبي a من الأعداد الترتيبية التي تمتلك تلك الخاصية.

إذاً، هناك Ω من الأعداد الأصلية المنيعة والأصغر من Ω. وبتطبيق مبدأ

الانعكاس مرة ثانية نجد أن هناك عدداً أصلياً منيعاً ν، ويوجد ν من الأعداد الأصلية المنيعة والأصغر من ν.

يُدعى ν عدداً منيعاً *فائقاً*. ولتعريفه يمكن القول إن ν عدد منيع فائق إذا تحقّق:

1. ν عدد منيع،
2. متى كان κ أصغر من ν، سيكون أول عدد منيع أكبر من κ أصغر من ν أيضاً.

إذا أردنا أن نعرِّف تابع θ_α، والتي تضمّ كل الأعداد المنيعة ونهاياتها، سنجد أنه إذا كان ν عدداً منيعاً فائقاً، فإن $\theta_\nu = \nu$. يتماشى ذلك مع حقيقة أن أي عدد أصلي منيع κ، فإن $\aleph_\kappa = \kappa$. ولأن العدد المنيع الفائق هو عدد عادي فلا يمكن الوصول إليه من الأسفل عن طريق المجموعة العليا للأعداد الترتيبية الأقل منه. كما لا يمكن الوصول إليه من الأسفل بالقفز من عدد منيع إلى عدد منيع آخر، وذلك لأنه نهاية أصلية.

يمكننا هنا أن نصيغ تعريفاً لـ «فائقية» أي عدد ترتيبي كما يلي. الأعداد المنيعة الفائقة ذات الرقم 0 هي ببساطة الأعداد المنيعة. الأعداد المنيعة الفائقة الأولى هي التي سميناها تواً. وعموماً، نقول إن ν هو «α^+ العدد المنيع الفائق الأول» إذا كان سابقاً للعدد «العدد المنيع الفائق α». وبالنسبة لنهاية الأعداد الترتيبية λ، فإن ν هو العدد الفائق-λ إذا كان ν مساوياً للعدد المنيع الفائق α لكل $\alpha < \lambda$.

بتكرار تطبيقنا مبدأ الانعكاس، نصل إلى عدد منيع فائق-فائق، ثم عدد منيع فائق-فائق-فائق، ... وهكذا. ويمكن أن نكتب بدلاً من ذلك: عدد منيع فائق^2، عدد منيع فائق^3، وهكذا. أي إن تكرار تطبيق مبدأ الانعكاس يعطينا دائماً عدداً فائقاً ذا مستوى أعلى. يمكن أن نصل إلى عدد منيع فائق أعلى μ، إذا حقق: μ عدد منيع ومسبوق بـ μ من الأعداد المنيعة الفائقة $^\alpha$ لكل $\alpha < \mu$. ومن الواضح أن هذه العملية قد تمتد إلى ما لانهاية.

الآن سنقفز فوق كل هذه الدرجات من الأعداد المنيعة لنصل إلى مستوى جديد من الأعداد الأصلية الكبيرة. بعبارات بسيطة، يمكن القول إن الطريقة

لفعل ذلك هي افتراض أن Ω عدداً ترتيبياً من كل درجات الأعداد المنيعة توجد قبل Ω. وبتطبيق مبدأ الانعكاس كما فعلنا قبل قليل، سنصل إلى الأعداد الأصلية الكبيرة ρ المسبوقة بـρ من الأعداد المنيعة، وρ من الأعداد المنيعة الفائقة، وρ من الأعداد المنيعة الفائقة الأعظمية، وهكذا. تُدعى هذه الأصول «أصول مالو»، نسبة للعالم بول مالو الذي اكتشفها في عام 1912.

نقول، على نحو دقيق، إن ρ هو عدد من أعداد مالو إذا كان عدداً منيعاً، وإذا حقق المبدأ الثابت للانعكاس: إذا امتلك ρ خاصية ثابتة، فهناك عدد $\kappa < \rho$ يمتلك هذه الخاصية. لكن المبدأ الثابت للانعكاس هو نسخة أكثر ضعفاً من المبدأ الكامل للانعكاس، فالأول يُطبَّق على الخصائص المحددة فحسب، بينما يُطبَّق الثاني على كل خصائص الأعداد المنيعة.

كيف نعرف إذا كان هناك أيٌّ من أعداد مالو أقل من Ω؟ مرة أخرى: مبدأ الانعكاس! بفرض أن «Ω تحقق مبدأ الانعكاس الثابت»، فيمكننا تطبيق مبدأ الانعكاس الكامل لنستنتج وجود عدد ما $\rho < \Omega$، حيث يحقق ρ المبدأ المحدد للانعكاس.

يجب أن نشير إلى ملاحظة مهمة هنا. لكي يكون النقاش السابق صحيحاً، يجب أن نتأكد أن الخاصية التي تقول «إن عدد ما يحقق المبدأ المحدّد للانعكاس» هي خاصية قابلة للتصور. يمكن أن نرى ذلك من خلال الطريقة التالية: «إذا كان عدد ما منيعاً، وكان I هو تراكم أعداد ترتيبية الأقل من هذا العدد، عندها سيوجد عدد أصلي منيع κ أصغر من هذا العدد حيث يوجد κ عنصراً من I أصغر من κ». بالرغم من أننا تمكنّا سابقاً من فهم مجموعة قوى مجموعة، وفهم عبارة «I هي اجتماع الأعداد الترتيبية الأقل من ( )»، لكن فهم مجموعة قوى ρ، وهي $P\rho$، لا يشبه أبداً محاولة فهم «المجموعة العشوائية والتي تضمّ ρ كعنصر فيها»، وهو أمر مستحيل.

يجب أن ندرك أن الملاحظة الأخيرة التي ذكرناها مهمة لأن مبدأ الانعكاس لا يُطبَّق على «Ω تحقق مبدأ الانعكاس الكامل». لِمَ لا؟ لأنه يجب على أي مجموعة من الأعداد الترتيبية أن تحتوي على عنصر أصغر، وتطبيق مبدأ الانعكاس كما سبق سيؤدي إلى عدم وجود عنصر أصغر، وهذا

يتناقض مع طبيعة الأعداد الترتيبية. لكن ما هو السبب في أن مبدأ الانعكاس الكامل خاصية غير ممكنة للأعداد الترتيبية؟ الجواب هو أن فكرة «خاصية الإدراك العشوائي للأعداد الترتيبية» غير قابلة للإدراك بحدٍّ ذاتها.

لا يمكن التفكير منطقياً بجميع الأفكار المنطقية دفعة واحدة، كما لا يمكن إدراك الخصائص القابلة للإدراك في مرة واحدة. يعطينا المبدأ الكامل للانعكاس عبارة صحيحة ومفهومة في كل مرة نتعامل مع خاصية محددة. لكن يوجد إحساس بأن المبدأ الكامل للانعكاس بمجمله لا يمكن أن يُدرَك أو يُفهم تماماً، فنحن لا نقدر أن ندرك كل الخصائص القابلة للإدراك دفعة واحدة. هذا ما ينبغي أن يكون بالنسبة إلى Ω؛ إنها العدد الترتيبي الوحيد الذي يحقق المبدأ الكامل للانعكاس، وفي الوقت ذاته لا يمكننا إدراكها.

إن تجمُّع الخصائص الثابتة قابل للفهم، ولهذا يمكن تطبيق مبدأ الانعكاس للوصول إلى أصول مالو. وهناك أيضاً عدة تجمعات قياسية مفهومة من الخصائص التي يمكننا، باستخدام النقاش السابق، أن نصل من خلالها إلى أعداد أصلية تُدعى أعداداً غير قابلة للوصف، وهي عموماً أكبر من عدد مالو الأصلي الأول.

بالعودة إلى أصول مالو، لنعتمد الرمز ρ للإشارة إلى العدد الأول من أصول مالو. إن ما يجعل الوصول إلى ρ من الأسفل أمراً صعباً، هو عدم وجود خاصية تمكّن من وصفه على أنه العدد المنيع الأول.

وعودة إلى المتتاليتين المتناظرتين اللتين ذُكرتا في بداية هذا النقاش، نجد أن ρ توافق مكان $\aleph_1$، لأن عملية بناء درجات أعلى وأعلى من الأعداد الأصلية المنيعة في محاولة للانتقال من θ إلى ρ، تشبه كثيراً عملية بناء أعداد ترتيبية قابلة للعدّ للانتقال من ω إلى $\aleph_1$. يبدو التشابه واضحاً إذا فكرنا في المحاولة الأولى من ناحية بناء المزيد والمزيد من المجموعات الفرعية النادرة من ρ، وفي المحاولة الثانية من ناحية بناء متتالية$-\aleph_1$ من الدوال من ^{N}N تحت الترتيب $<_{bep}$. كما يوجد تشابه آخر بين ρ و $\aleph_1$، وهو أن $\aleph_1$ يمتلك خاصية «الثبات» من مبدأ الانعكاس.

يمكن لكل هذه التعريفات التي ذكرناها للأعداد الأصلية الكبيرة أن تصبح أكثر شمولاً بتوسيع تعريف الأعداد الأصلية المنيعة. يمكن أن نعرِّف العدد الأصلي المنيع القوي θ بالتالي:

1. إذا كان θ عادياً،
2. إذا حقق: أياً كان κ أصغر من θ، فإن 2^{κ} أصغر منه أيضاً.

إذا كان 2^{κ} مساوياً لـ κ^{+} كما تقول فرضية الاستمرارية، فبالتأكيد سيتساوى العدد المنيع مع العدد المنيع القوي. لكن يمكن، من حيث المبدأ، أن يتساوى 2^{κ} مع ρ نفسه، وهو أول أصول مالو.

بالفعل، لا يوجد حدّ أعلى لما يمكن أن تصل إليه الاستمرارية. لكن بما أن $\kappa < \Omega$ يقتضي أن $2^{\kappa} < \Omega$، يمكننا أن نطبِّق المنطق نفسه في السابق للوصول إلى عدد منيع قوي، وعدد منيع قوي فائق، وعدد منيع قوي فائق أعظمي، وأصول مالو.

يوجد تنوع كبير من الأصول الكبيرة بعد أصول مالو. تأتي أولاً الأصول المنيعة، ثم الأصول المنيعة الوصف، ثم أصول رامسي، ثم الأصول القابلة للقياس، ثم الأصول المضغوطة بقوة، ثم الأصول المضغوطة الأعظمية، وأخيراً، الأصول القابلة للتمدّد. ينخرط العديد من العلماء في البحث عن هذه الأصول من نوع أو آخر. ويمكن للمرء أن يؤلف كتاباً عن الأصول الكبيرة. لكني سأذكر هنا الأصول القابلة للقياس والأصول القابلة للتمدد[19].

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \omega & \aleph \\ 0 & \omega & \aleph_1 & \theta & \rho \\ 0 & & \kappa & \lambda & \end{array}$$

يُدعى الأصل الأول القابل للقياس κ. أن κ أكبر بكثير من كل الأصول التي ناقشناها إلى الآن، ومن الأفضل أن نبدأ بتشبيهات جديدة لنتمكن من

19– Frank Drake, *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals* (Amsterdam: North-Holland, 1974).

فهمه. ليس القفز إلى الأصول القابلة للقياس أمراً يشبه القفز من 0 إلى 1 أو من 0 إلى ω. في الحقيقة، اتضح تقنياً أن 1 وω أصلان قابلان للقياس، لذا من الأفضل أن ندعو κ أول أصل قابل للقياس بعد ω.

عُرِّفت الأصول القابلة للقياس رسمياً عام 1930 من قبل العالم ستانيسلو ألما، الذي شارك في اختراع القنبلة الهيدروجينية. لكن لم يكتشف العلماء مدى كِبَر الأصول القابلة للقياس وغرابتها حتى ستينيات القرن الماضي. والأمر الأكثر غرابة حول هذه الأعداد أن مجرد معرفتنا بوجودها تجبرنا على استنتاج وجود مجموعات عديدة من الأعداد الطبيعية التي لم نكن نتوقعها. إن اكتشاف وجود مجرات بعيدة في الكون وجّهنا لاكتشاف المزيد من الخلايا الحية الموجودة في أجسادنا. وعلى نحو أكثر دقة، إذا وُجدت الأصول القابلة للقياس، فلا بدّ من وجود مجموعة من الأعداد الصحيحة، $0^{\#}$، والتي لا يحتويها كون غودل للمجموعات القابلة للإنشاء.

إذاً، ما هي الأصول القابلة للقياس؟ نقول إن κ أصل قابل للقياس إذا وُجدت طريقة محددة لتقرير أي من مجموعاته الفرعية كثيفة وأيها متباعدة. تُعرف المجموعات الفرعية الكثيفة لـκ أيضاً بـالمجموعات الفرعية الكبيرة، أو العقدية[20]. وتُدعى المجموعات الفرعية المتفرقة أو المتباعدة بـالمجموعات الفرعية الصغيرة، أو اللاعقدية.

إن طريقة تحديد المجموعات الفرعية العقدية تتمثّل ببساطة بتحديد المجموعة N لكل المجموعات الفرعية الكبيرة. ونقول إن κ أصل قابل للقياس إذا وُجدت N التي تتممκ، أي إن تقاطع أقلّ من κ من عناصر N هي أيضاً عنصر من κ[21].

20- جاء مصطلح «الفئة العقدية» من: Gaisi Takeuti, «The Universe of Set Theory», in Bulloff, Holyoke and Hahn, eds., *Foundations of Mathematics* (Springer-Verlag, 1969), pp. 74-128.

21- انظر William Reinhardt, «Remarks on Reflection Principles, Large Cardinals, and Elementary Embeddings», in: Thomas Jech, ed., Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics

من المثير للاهتمام أن نلاحظ أن الأصول الكبيرة الأصغر تملك أسماء مهيبة أكثر من الأصول الكبيرة الأعظم. ففي البداية، لدينا الأصول المنيعة التي يُتعذَّر الوصول إليها، تحتفل بصخب بحجمها العظيم، بينما في الأعلى، نجد أحد أكبر الأصول يصف نفسه بأنه قابل للقياس، ويشير أكبر أصل معروف ببساطة إلى إمكانية تجاوزه من خلال اسمه «قابل للامتداد».

إن التوصيف الدقيق للأصول القابلة للامتداد سيأخذنا بعيداً. لذا اسمحوا لي أن أقدِّم لكم وصفاً شعرياً إلى حدٍّ ما لها.

لنفكر بالأعداد الترتيبية على أنها جبل لا نهاية له، ولنتسلقه. لنتخيل أننا وصلنا إلى الأصل الأول القابل للتمدد، والذي يُدعى عادة λ. إذا ألقينا نظرة خاطفة للأسفل، سنرى بعض النقاط التي هي بالضرورة أقل من الذروة التي وصلنا إليها. سنرى الأصول المنيعة والأصول القابلة للقياس، لكن بالقرب منا سنجد العديد من الأصول التي لا يمكننا تحديد أي منها. سنجد أن الجرف الأقرب إلينا مزدحم بالأصول التي تقطعها الحواف المتكررة، ويتكرر هذا النمط لدرجة لا يمكن معها تحديد أي ميزة قريباً منا. يوجد العديد من هذه الجروف التي تشبه الذي وصلنا إليه، لكن من الصعب أن ندرك أو نتحمل رتابة التسلق.

قد نرى نسراً كبيراً يحلق حول قمة الجبل. وعندما نستلقي لنرتاح قليلاً ونغرق في هدوء فارغ، يحملنا هذا النسر بعيداً إلى أعلى الجبل... أم إن هذا مجرد حلم؟

بعد رحلتنا الغامضة مع النسر، سنقف وننظر للأعلى. ستبدو المسافات هي ذاتها. وفي الأسفل، سنجد الأصول التي ميّزناها سابقاً. ولن نتمكن من معرفة إذا كان النسر حملنا أم لا، لأنه ما من طريقة لنعرف أي من هذه الحواف التي ننظر إليها كنا عليها سابقاً.

XIII, Part 2 (Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1974), pp. 189-205. وانظر أيضاً: Hao Wang, «Large Sets», in Butts and Hintikka, eds., *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory* (Dordrecht, Holland: Riedel, 1977), p. 309.

كورت غودل

التدريب الثاني

قضايا نظرية عدم الاكتمال

يقدم هذا التدريب دراسة لإثبات نظرية عدم الاكتمال. وبالرغم من أن مستوى الدقة سيكون متواضعاً، إلا أن الإثبات سيأخذ مظهراً تقنياً إلى حدٍّ ما، وهو أمر لا مفرّ منه لفهم بعض النقاط الدقيقة في إثبات غودل.

يناقش قسم «النظم الشكلية» عدداً من المفاهيم الأولية، كفكرة النظام الشكلي، والتمييز بين الإعراب والدلالة، ومفاهيم الاتساق والاكتمال. ويتمّ كل هذا بالإشارة إلى وصف نظام شكلي معين، وهو «حساب جوزيه بيانو». وفي قسم «التمثيل الذاتي»، نرى كيفية إنشاء جمل رياضية تمثِّل ذاتها. أما قسم «إثبات غودل»، فيقدِّم البراهين الفعلية لنظريات غودل، بالإضافة إلى مناقشة الظروف الدقيقة التي بموجبها تُطبَّق هذه النظريات. ويحتوي القسم الأخير على تحليل رياضي دقيق لمسألة ماورائية غامضة، وهي عما إذا بإمكان الآلات التفكير.

النظم الشكلية

تنصّ نظريتا عدم الاكتمال لـغودل على أن جميع الأنظمة الشكلية من نوع معين تخضع لاثنين من المحددات. ونعني بالنظام الشكلي مجموعة من البديهيات الرياضية ومجموعة من القواعد والإجراءات التي يجمع المرء من خلالها البديهيات لإنتاج أدلة على النظريات. تنطبق نتائج غودل على أي نظام شكلي رياضي يكون: 1) قابلاً للوصف بدقة، 2) متسقاً، 3) قوياً مثل «حساب بيانو».

تنصّ نظريتا غودل على أن نظام T هو أولاً غير مكتمل... بمعنى وجود بعض البيانات التي لا يمكن إثباتها أو دحضها بواسطة T؛ وثانياً، غير قادر على إثبات اتساقه... بمعنى عدم قدرته على إثبات أنه لا يتضمن أي تناقض.

يقدِّم هذا القسم تحديداً دقيقاً للتعبيرات التقنية المختلفة المستخدمَة في الفقرة الأخيرة. وسنبدأ بمفهوم النظام الشكلي، مع وصف نظام شكلي معيّن في الوقت ذاته، وهو «حساب بيانو».

النظام الشكلي الرياضي، بصورة عامة، هو نظام من الرموز مع قواعد لتوظيفها. ويتكون من أربعة مكونات:

1. «أبجدية» أساسية للرموز التي ستُستخدَم. ويعني ذلك أي تسلسل محدود للرموز الأساسية ويُسمَّى «صيغة». لكن معظم هذه السلاسل العشوائية من الرموز عديمة الفائدة.
2. معيار لتحديد أي من سلاسل الرموز هذه تكون «سليمة قواعدياً». وتُسمَّى هذه السلاسل السليمة قواعدياً بـ«الصيغ ذات المعنى».
3. نأخذ بعد ذلك مجموعة معينة من الصيغ ذات المعنى لتكون بديهيات للنظام.

4. نتبنَّى بعد ذلك بعض قواعد الاستدلال التي تصف الطرق المسموح بها للجمع بين البديهيات في سبيل تقديم إثباتات للصيغ الأخرى ذات المعنى.

إن الإثبات الذي يقدِّمه النظام الشكلي T هو سلسلة من الصيغ مثل «M_1، M_2، ...»، حيث كل M_i هي إما بديهية بالنسبة لـT أو يتمّ الحصول عليها من بعض الصيغ السابقة بواسطة قواعد الاستنباط. ويُقال إن الصيغة f يمكن إثباتها اعتماداً على النظام الشكلي T إذا كان هناك تسلسل إثبات ينتهي بالصيغة f.

سنوضح هذه المفاهيم الآن من خلال وصف النظام الشكلي P لعلم الحساب الذي اخترعه العالِم جوزيه بيانو في عام 1889. كان بيانو من أوائل العلماء الذين استخدموا ما نسميه الآن المنطق الرمزي. على سبيل المثال، استخدم الرمز ($\exists x$)، ويعني «يوجد x حيث...». واعتاد على كتابة جميع هوامش محاضراته بلغته الرمزية الجديدة. قام بيانو بالتدريس في أكاديمية عسكرية، وأثارت لغته الرمزية غضب طلابه، لدرجة أنهم تقدموا بشكوى تسبَّبت بطرده. بعد ذلك انتقل إلى جامعة تورينو في إيطاليا، حيث وجد بيئة مناسبة له[1].

يمكن للأشخاص الذين يألفون التعامل مع النظم الشكلية تخطي الوصف التالي للنظام الشكلي P. أما الذين لم يتعاملوا قبلاً مع نظم شكلية فسيواجهون بعض الصعوبة في فهم هذا الوصف.

تتكوّن الرموز الأساسية المستخدَمة في النظام الشكلي P من ثلاثة أنواع: الرموز المنطقية وعلامات الترقيم، والرموز المتغيرة، والرموز الحسابية الخاصة. الرموز المنطقية سبعة:

$$\sim، V، \&، \rightarrow، \exists، \leftrightarrow، \forall$$

1- توجد العديد من الكتب التي تصف بناء الأنظمة الشكلية المنطقية. ويمكن العثور على تقديم شبه شعبي بتنسيق جيد في: Howard DeLong, A *Profile of Mathematical Logic* (Reading, Massachusetts: Addison Wesley, 1971).
كما يمكن العثور على معالجة أكثر تقنية في Joseph R. Shoenfield, *Mathematical Logic* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1967).

وتُنطق على التوالي: ليس (أي نفي الجملة)، أو، و، يشير إلى، يوجد، إذا وفقط إذا، أياً يكن.

ورموز الترقيم الأربعة هي الأقواس المستديرة والمربعة: ( )، [ ]. ونظراً لأن الجمل في النظام الشكلي P قد تكون معقدة على نحو عشوائي، فإننا نحتاج إلى عدد لا حصر له من الرموز المتغيرة، مثل: p، q، x، y، z، v_0، v_1، v_2، m، n،... أما الرموز الخاصة بدراسة الحساب هي خمسة: (0، S، +، ×، =). وتُنطق هذه الرموز كما يلي: (صفر، التالي لـ زائد، ضرب، يساوي).

أكملنا بذلك المرحلة الأولى من تحديد النظام الشكلي P بتحديد الرموز الأساسية المستخدَمة في هذا النظام. وربما لا تكون الرموز الغريبة لغير الرياضيين سوى S والمحددات الكمية ∀ و ∃.

عموماً، إذا كان n عدداً طبيعياً، فمن المفترض أن يكون Sn هو العدد التالي له. أي يمكن اعتبار المجموعة (0، 1، 2، 3، ...) هي المجموعة (0، S0، SS0، SSS0، ...). وكما سنرى، يمكن تعريف كل من الجمع والضرب اعتماداً على الرمز لتحديد العدد الطبيعي الأكبر التالي. أما معنى المحددات الكمية فيمكن أن نوضحه من خلال الأمثلة التالية للصيغ ذات المعنى وما يُقصد بها.

$$(\forall x)(\exists y)[y = Sx]$$

يعني أن لكل عدد طبيعي عدد تالٍ له.

$$(\forall x)(\exists y)[x = 0 \ V x = Sy]$$

يعني أن كل عدد طبيعي إما أن يساوي الصفر أو يكون عدداً تالياً لعدد آخر.

$$SS0+SS0=SSS0$$

يعني أن اثنين زائداً اثنين يساوي ثلاثة.

$$x+Sy=S(x+y)$$

يعني أن ناتج x زائداً للعدد التالي لـ y يساوي العدد التالي لناتج x زائداً y.

$$(\exists y)[x=SS0\times y]$$

يعني أنه يوجد عدد y ينتج عن مضاعفته العدد x. أي إن x عدد زوجي.

$$(\exists y)[x=SS0+y]$$

يعني أن x أكبر من y أو تساوي 2.

$$(\forall y)(\forall z)[x=y\times z\rightarrow(y=x\ V\ z=x)]$$

يعني أن x أحد قواسم نفسه. أي إنه عدد أولي.

$$(\forall n)(\exists p)(\exists x)(\forall y)(\forall z)$$

يعني أن لكل عدد طبيعي n يوجد عدد أولي.

$$[p=n+x\ \&\ (p=y\times z\rightarrow(y=p\ V\ z=p))]$$

يعني أن p أكبر من n، أي إنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية.

تُبنى الصيغ ذات المعنى للنظام الشكلي p على مرحلتين. أولاً، نحدّد مفهوم المصطلح، ثم نستخدم هذا المفهوم لتحديد الصيغ ذات المعنى. ويتكون تعريف المصطلح من ثلاث خطوات:

1. كل رمز متغيِّر هو مصطلح؛
2. إذا كان s وT مصطلحات، فإن $S(t)$، $(s)+(t)$، $(s)\times(t)$؛ (نضع الأقواس تجنباً لغموض المصطلحات. أما من الناحية العملية، نحذف الأقواس دائماً معتمدين على قواعد التنفيذ S و + و ×)

3. تُعتبر سلسلة الرموز مصطلحاً إذا كان من الممكن الحصول عليها من التطبيقات المتكررة للخطوتين 1 و2. مثلاً، Sx و$SS0$ و $v_{13}\times(SS0+S0)$ هي مصطلحات، بينما ليست $x0$ أو SSS أو $S0+$ مصطلحات.

يمكننا الآن تحديد مفهوم صيغة ذات معنى للنظام الشكلي P في ثلاث خطوات:

1. إذا كان s وt مصطلحات، فإن $s=t$ صيغة ذات معنى؛
2. إذا كانت A وB صيغتين ذات معنى، فإن الصيغ $\sim(A)$ و$(A\vee B)$ و$(A\&B)$ و$(A\leftrightarrow B)$ ذات معنى أيضاً؛ وإذا كان w رمزاً متغيراً، فإن الصيغ $(\exists w)[A]$ و$(\forall w)[A]$ ذات معنى أيضاً. (تُستخدم الأقواس المستديرة لفصل الجُمل، بينما تُستخدم الأقواس المربعة للإشارة إلى الصيغة التي ينطبق عليها المحدِّد الكمي).
3. تُعتبر أي سلسلة رموز صيغة ذات معنى إذا أمكن الحصول عليها من التطبيقات المتكررة للخطوتين 1 و2.

رأينا عدداً من الأمثلة على الصيغ ذات المعنى أعلاه.

يُقال إن الرمز المتغير w حر في الصيغة A إذا وُجد في A، وإذا لم توجد المصطلحات $(\forall w)$ و$(\exists w)$ في A قبل w. وإذا لم تتضمن الصيغة ذات المعنى أي رمز متغير، فنقول عندها إنها جملة، ويمكن اعتبارها جملة صحيحة أو خاطئة.

نحن الآن جاهزون لذكر بديهيات النظام الشكلي P. تُقسم هذه البديهيات إلى أربع مجموعات:

المجموعة L، وهي البديهيات المتعلقة باستخدام الرموز المنطقية؛

المجموعة Q، وهي البديهيات التي تتعلق باستخدام المحددات الكمية؛

المجموعة E، والتي تتضمن الرمز (=)؛

المجموعة P، والتي تتضمن بديهيات بيانو للحساب.

يضمّ كل نظام شكلي رياضي المجموعات الثلاث الأولى بين بديهياته، لذا غالباً ما لا تُذكر هذه البديهيات صراحة عند تقديم نظرية شكلية، لكنني ذكرتها الآن توخياً للدقة واكتمال التقديم.

إذا كانت A وB وما إلى ذلك صيغاً، فيمكننا تكوين مجموعات مختلفة منها باستخدام الروابط المنطقية مثل ~ وV و& و↔. ويمكن التعبير عن معنى هذه الروابط المنطقية من خلال إظهار كيف تعتمد قيم الحقيقة للصيغ المركبة على قيم الحقيقة للأجزاء المكوِّنة لها، كما في الشكل 89. ستكون بعض التركيبات صحيحة بغضّ النظر عن صحة أو خطأ أجزائها المكوِّنة، وتدعى التركيبات الصحيحة حتماً بـ«الحشو». ومن الأمثلة على الحشو:

$AV{\sim}A$ أي إما A صحيحة أو نفي A صحيح؛

$$(A\rightarrow B)\leftrightarrow({\sim}B\rightarrow{\sim}A)$$

أي إذا كانت A تؤدي إلى B فإن نفي A يؤدي إلى نفي B؛

$$(AVB)\leftrightarrow{\sim}({\sim}A\&{\sim}B)$$

أي إذا كانت إما A أو B صحيحة، فلا يمكن نفيهما معاً.

وفيما يلي مثالان مجددان لأول اثنين من أشكال هذا الحشو.

$$x=0\,V{\sim}(x=0)$$

أي إما أن x تساوي الصفر أو x لا تساوي الصفر.

$$((\forall y[{\sim}(x=Sy)]\rightarrow x=0)\leftrightarrow({\sim}(x=0)\rightarrow{\sim}(\forall y)[{\sim}(x=Sy)])$$

أي x هي عدد تال لعدد طبيعي إذا وفقط إذا لم تكن تساوي الصفر.

A	B	${\sim}A$	AVB	$A\&B$	$A\rightarrow B$	$A\leftrightarrow B$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

الشكل 89

$AVB\leftrightarrow{\sim}({\sim}A\&{\sim}B)$							
A	V	B	$\leftrightarrow$	$\sim$	$({\sim}A$	$\&$	${\sim}B)$
T	T	T	T	T	F	F	F

T	*T*	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*

الشكل 90

هناك إجراء متنٍ ومحدّد يمكن من خلاله التحقق مما إذا كانت سلسلة ما من الرموز عبارة عن حشو. نقوم ببساطة ببناء جدول للحقيقة ونرى ما إذا كانت الجملة المعنية صحيحة بغضّ النظر عن قيم الحقيقة في العبارات المكوّنة لها. لذلك لا يوجد خلل في الدقة أو الوضوح في اعتبار المجموعة L هي مجموعة كل الحشو.

على نحو بديل من ذلك، يمكن أن نأخذ ثمانية مبادئ أساسية للحشو، والتي تتبعها جميع صيغ الحشو وفقاً لطريقة الإثبات المذكورة فيما يلي. لكني لن أذكر الآن المبادئ الثمانية الأساسية، بل أذكر ثلاثة مخططات بيانية للمجموعة Q توضح معنى المحددات الكمية:

المخطط Q_1: إذا كانت $A(w)$ صيغة ذات معنى، فإن w متغير، و t مصطلح حيث:

$$(\forall w)[\forall(w)]\rightarrow A[t]$$

المخطط Q_2: إذا كانت $A(w)$ صيغة ذات معنى، فإن w متغير، و t مصطلح حيث:

$$A[t]\rightarrow(\exists w)[A(w)]$$

المخطط Q_3: إذا كان w متغيراً و $A(w)$ صيغة ذات معنى، فإن:

$$A(w)\rightarrow(\forall w)[A(w)]$$

يبدو المخطط Q_3 الوحيد الذي يثير الدهشة. يُسمَّى هذا المخطط «قاعدة

التعميم»، ويوضح أنه إذا أثبتنا صحة $A(w)$ للمتغير w، فإننا نثبت أن $(\forall w)[A(w)]$، أي إن A صحيحة أياً كان المتغير w.

الآن مخططات المجموعة E:

المخطط E_1: أياً كان المصطلح t، فإن $t=t$.

المخطط E_2: أياً كان المصطلحين t وs، فإن $t=s\rightarrow s=t$.

المخطط E_3: لأي صيغة ذات معنى $A(w)$ مع متغير حر w، ولأي مصطلحين t وs، فإن $t=s\rightarrow(A[t]=A[s])$.

إن كلاً من هذه المخططات تمثّل أعداداً لا حصر لها من البديهيات. وبالتالي، فإن المخطط E_1 يمثّل:

$0=0$، $0+0$، $S(S0+0)=S(S0+0)$، وهكذا. لكن بدلاً من كتابة كل بديهية هنا، فإننا نمثلها جميعاً على شكل مخطط لمرة واحدة بالصيغة $t=t$. ويمثّل المخططان E_2 وE_3 الخاصتين الانعكاسية والمتماثلة للعلاقة (=). كما تُشتق الخاصة المتعدية من المخطط E_3 حيث:

$$(t=s\ \&\ s=r)\rightarrow t=r$$

أي إن هذا المخطط ينظم مبدأ إمكانية استبدال علاقة المساواة.

والآن المجموعة P من البديهيات:

المخطط P_1: $(\forall x)[\sim(Sx=0)]$.

المخطط P_2: $(\forall x)(\forall y)[Sx=Sy\rightarrow x=y]$.

المخطط P_{3a}: $(\forall x)[x+0=x]$.

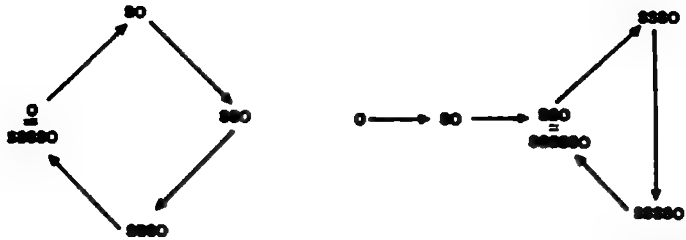
المخطط P_{3b}: $(\forall x)(\forall y)[x+Sy=S(x+y)]$.

المخطط P_{4a}: $(\forall x)[x\times 0=0]$.

المخطط P_{4b}: $(\forall x)(\forall y)[x\times Sy=(x\times y)+x]$.

المخطط P_5: لكل صيغة ذات معنى $A(w)$ مع متغير حر w، فإن

$$A[0]\rightarrow((\forall x)[A[x]\rightarrow A[Sx]]\rightarrow(\forall y)[A[y]])$$



يخالف المخطط P_1
لأن $S(SSS0) = 0$

يخالف المخطط P_2
لأن $S(S0) = S(SSSS0)$
لكن $S0 \neq SSSS0$

الشكل 91

الهدف من البديهتين الأولى والثانية هو ضمان عدم تساوي أي من المصطلحات *0*، *S0*، *SS0*، *SSS0*، ... مع أي من بعضها البعض. كما يستبعد المخطط الأول إمكانية انحناء المتتالية في دائرة بأن يكون $S^n 0=0$ أياً تكن n. أما المخطط الثاني فيستبعد إمكانية انحناء المتتالية في حلقة لانهائية بعد الصفر. ويشكّل المخططان P_{3a} و P_{3b} التعريف العودي لعملية الجمع (+) بالنسبة للعدد اللاحق *S*. والتعريف هو:

$$n+0=n$$

$$n+Sm=S(n+m)$$

وللتعرف على هذه العملية في الواقع، يمكن أن نفكر في استخدامها للحصول على 2+3=5 كما يلي:

$$SSS0+SS0=S(SSS0+S0)$$

$$=S(S(SSS0+0)$$

$$=S(S(SSS0)$$

$$=SSSSS0$$

ويعرِّف المخططان P_{4a} و P_{4b} عملية الضرب × بأنها تكرار لمصطلح الجمع +:

$$n\times 0=0$$

$$n\times Sm=(n\times m)+m$$

ولتجربة ذلك عملياً، نطبّقه على $3×2=6$:

$$SSS0×SS0=(SSS0×S0)+SSS0$$
$$=((SSS0×0)+SSS0)+SSS0$$
$$=(0+SSS0)+SSS0$$
$$=SSS0+SSS0$$
$$=SSSSSS0$$

يُسمَّى P_5 مخطط الاستقراء، وهو في الواقع عدد لانهائي من البديهيات. ومع أخذ مناقشة مكتبة بابل في الاعتبار، ليس من الصعب رؤية وجود صيغ مختلفة ذات معنى مع متغيِّر حر واحد. لكل من $A[w]$، يؤكد مخطط الاستقراء أنه إذا كان لدى 0 الخاصية A، وإذا تحقق (لأي متغير x له الخاصية A فإن $x+1$ لها الخاصية A)، فإن لكل y الخاصية A.

لرؤية مثال بسيط لكيفية تطبيق هذا المخطط، نضع في الاعتبار كيفية إثبات $(\forall y)[0+y=y]$، وهي حقيقة ضرورية لإثبات القانون التبادلي الكامل: $(\forall x)(\forall y)[x+y=y+x]$.

والآن، لإثبات ذلك، نثبت أولاً أن $0+0=0$،

وثانياً $(\forall x)[0+x=x\rightarrow 0+Sx=Sx]$ كما يلي:

$$0+Sx=S(0+x)$$
$$=S(x)$$
$$=Sx$$

لا نستخدم سوى قاعدة استدلال واحدة في براهين النظام الشكلي P، وتُعرف بـ«قاعدة الإثبات» والتي ذكرناها سابقاً: إذا كان A و B صيغتين ذات معنى، فيمكن استنتاج B من A، $A\rightarrow B$. وهذا شكل مألوف من أشكال التفكير، لأنه من الناحية العملية يمكن إثبات B عن طريق إثبات A أولاً، ثم إثبات أن B نتيجة ضرورية لـ A.

لنفترض الآن أن جميع الأنظمة الشكلية التي لدينا تتضمن MP كقاعدتها الوحيدة للاستدلال. أي يمكن استبدال أي قاعدة من النموذج «استنتج B من $A_1, A_2, ..., A_n$» بالبديهية

$$«A_1\rightarrow(A_2\rightarrow(...(A\_n\rightarrow B))...)»$$

يتكون البرهان في النظام الشكلي P من متتالية من الصيغ، وتكون كل صيغة إما بديهية من إحدى المجموعات P أو E أو Q أو L التي ذكرناها سابقاً، أو علاقة ترابطية يمكن استنتاجها من صيغة من صيغ النظام الشكلي P.

تُعتبر كتابة البراهين الشكلية عملية مرهقة للغاية. على سبيل المثال، سنكتب البرهان الشكلي لـ:

$$(\forall y)[0+y=y]$$

1. $(\forall x)\ [x + 0 = x]$
2. $(\forall x)\ [x + 0 = 0] \rightarrow 0 + 0 = 0$
3. $0 + 0 = 0$
4. $0 + x = x \rightarrow (0 + Sx = S(0 + x) \rightarrow 0 + Sx = Sx)$
5. $(0 + x = x \rightarrow (0 + Sx = S(0 + x) \rightarrow 0 + Sx = Sx))$
   $\rightarrow (0 + Sx = S(0 + x) \rightarrow (0 + x = x \rightarrow 0 + Sx = Sx))$
6. $0 + Sx = S(0 + x) \rightarrow (0 + x = x \rightarrow 0 + Sx = Sx)$
7. $(\forall x)\ (\forall y)\ [x + Sy = S(x + y)]$
8. $(\forall x)\ (\forall y)\ [x + Sy = S(x + y)] \rightarrow$
   $(\forall y)[0 + Sy = S(0 + y)]$
9. $(\forall y)\ [0 + Sy = S(0 + y)]$
10. $(\forall y)\ [0 + Sy = S(0 + y)] \rightarrow 0 + Sx = S(0 + x)$
11. $0 + Sx = S(0 + x)$
12. $0 + x = x \rightarrow 0 + Sx = Sx$
13. $(0 + x = x \rightarrow 0 + Sx = Sx) \rightarrow (\forall x)$
    $[0 + x = x \rightarrow 0 + Sx = Sx]$
14. $(\forall x)\ [0 + x = x \rightarrow 0 + Sx = Sx]$
15. $0 + 0 = 0 \rightarrow ((\forall x)[0 + x = x$
    $\rightarrow 0 + Sx = Sx] \rightarrow (\forall y)\ [0 + y = y])$
16. $(\forall x)\ [0 + x = x \rightarrow 0 + Sx = Sx] \rightarrow \forall y)[0 + y = y]$
17. $(\forall y)\ [0 + y = y]$

يختتم هذا وصف النظام الشكلي P.

تتمتع البراهين الشكلية الكاملة بنوعية تتحدى المهووسين بتصيُّد الأخطاء. ولكن على المنوال نفسه، فهي قوية جداً وتوضح ذاتها بذاتها. لذا لا مكان للخيال هنا، ويمكن التحقق من صحة البرهان الشكلي ببساطة بالنظر إلى أنماط الرموز. وبالنظر إلى الرموز الأساسية، وقواعد تشكيل

المصطلح والصيغة، والبديهيات والمخططات البديهية وقواعد الاستدلال، ويمكن للمرء التحقق مما إذا كانت متتالية سلاسل الرموز هي برهان بطريقة ميكانيكية بالكامل أم لا.

نجد في كتاب «Gödel's Proof»، الذي قام بتأليفه العالمان أرنست ناغل وجيمس نيومان، مقارنة مثيرة للاهتمام بين حساب التفاضل والتكامل (والتي يقصدون بها النظام الشكلي) ولعبة الشطرنج:

«تُلعب الشطرنج باثنتين وثلاثين قطعة بتصاميم محدّدة على لوحة مربعة تضمّ أربعة وستين مربعاً، ويمكن تحريك القطع وفقاً لقواعد ثابتة. ومن الواضح أن اللعب لا يحتاج إلى تحديد «تفسير» لأي من القطع أو لمواقعها المختلفة على اللوحة... تتوافق القطع والمربعات في اللوحة مع العلامات الأولية في حساب التفاضل والتكامل؛ وتتوافق مواقع القطع الأولية مع الصيغ الأولية أو البديهيات لحساب التفاضل والتكامل؛ وتتوافق المواقع اللاحقة للقطع مع الصيغ المشتقة من البديهيات (أي النظريات)؛ بينما توافق قواعد اللعبة قواعد الاستدلال (أو الاشتقاق) لحساب التفاضل والتكامل»[2].

يمكن تبسيط الأمور إلى حدٍّ كبير إذا أمكن اعتبار الخطاب البشري بمثابة عمل لنظام شكلي ما. لن يضطر المرء بعد ذلك إلى التساؤل عن معاني الكلمات، ولكن يمكنه بدلاً من ذلك الحكم على صحة حجج الناس عن طريق التحقق منها مقابل مجموعة ثابتة من القواعد والبديهيات التي يمكن وصفها بدقة. كان غوتفريد لايبنتس يحلم بإيجاد مثل هذا النظام العالمي، «الطابع العالمي»، وتصور يوماً تخرج فيه الأطراف المتعارضة ببساطة عن القواعد، قائلة: «دعونا نظنّ!» على كل حال، عرفنا سابقاً في قسم «ما هي

2- Ernest Nagel and James R. Newman, *Gödel's Proof* (New York: New York University Press, 1958), PP. 34-35. كان هذا الكتاب الصغير، الذي تم توسيعه من مقال نُشر عام 1956 في مجلة Scientific American، هو التفسير غير التقني الوحيد لنظرية عدم الاكتمال. يُفضَّل الآن اعتماد كتاب DeLong المذكور أعلاه كمرجع، لأن كتاب Nagel ساذج في بعض النواحي. يمكن العثور أيضاً على تقرير مفصَّل لنتائج غودل في: Douglas Hofstadter's *Gödel, Escher, Bach*.

الحقيقة؟» أنه لا يمكن أن يوجد وصف محدّد لكيفية إنشاء جميع الكتب الحقيقية، لأنه لا يمكن أن توجد آلة للحقيقة.

من المفيد أحياناً التفكير في النظام الشكلي على أنه آلة وليس لعبة. إن الهدف من النظام الشكلي هو إنشاء براهين للنظريات، ويمكننا تحديد نظام شكلي T بآلة معينة تطبع القائمة $T1$، $T2$، ... لجميع النظريات التي يثبتها هذا النظام.

يمكننا بناء هذه الآلة على النحو التالي. نبني أولاً جزءاً يقوم بطباعة كتب المكتبة الشاملة. ثم نبني جزءاً آخر يفحص كل كتاب لمعرفة ما إذا كان برهاناً. وكلما عثرنا على برهان، نضيف الصيغة الأخيرة منه إلى قائمة النظريات. نلاحظ أن هذه الآلة منتهية تماماً، لأنه على الرغم من وجود عدد لانهائي من البديهيات، إلا أن وصفها تخطيطياً هو طريقة منتهية.

هناك نوعان من السمات التي يجب أن يمتلكها النظام الشكلي T: الاكتمال والاتساق. نقول إن النظام T مكتمل إذا كان لكل جملة A في لغة T، فإن A أو نفي A هي نظرية يثبتها النظام T. ونقول إن النظام T متسق إذا لم يتمّ إثبات أي تناقضات فيه.

لتوضيح هذين المفهومين الرياضيين، دعونا نفكر في كيفية تطبيق هذه المفاهيم على النظم الأقل شكلية. على سبيل المثال، العديد من الروايات هي عبارة عن مجموعات من الجُمل حول بعض الأفراد. إذا أخذنا الإنكليزية كلغة مع قواعد الاستدلال، فيمكن اعتبار الرواية كمجموعة من البديهيات المتعلقة بشخص ما. وتكون الرواية وصفاً كاملاً لهذا الشخص إذا أمكنها أن تقدِّم أجوبة لكل الأسئلة المتعلقة به.

إن معظم الروايات ليست نُظماً مكتملة. هل ضحك راسكولينكوف كثيراً في سيبيريا؟ لن تتأكد من ذلك أبداً بقراءتك لرواية «الجريمة والعقاب». ما طول فيرنور ماكسويل؟ لن تعرف ذلك من قراءتك لرواية «*Spacetime Donuts*». ربما يصيبنا اليأس من العثور على رواية مكتملة أو كتابتها، لكن هناك طريقة واحدة لذلك. ما رأيكم برواية تضمّ جملة وحيدة: «جون غير موجود على الإطلاق». في هذه الحالة، يمكن للرواية أن تجيب على

كل الأسئلة المتعلقة بـ «جون». ما طوله؟ لا طول له. كم عدد الخلايا في جسده؟ لا شيء. هناك احتمالات أخرى لأوصاف مكتملة أيضاً. مثلاً، «جون هو مثلث متساوي الأضلاع ليس له موقع مكاني أو زماني معين». إن ما سبق وصف مكتمل أيضاً.

يمكن لحساب بيانو P أن يكون نظرية مكتملة لو أمكننا أن نثبت أو ندحض أي جملة بلغة P بواسطة P ذاته. كما سنرى، أثبت غودل أن النظرية ليست نظرية مكتملة. وقام بالتحديد بإثبات أن الجملة ذات الشكل $(\forall v_1)...(\forall v_n)[F[v_1, ..., v_n]\neq 0]$ غير قابلة للإثبات أو الدحض من خلال P، لأنها جملة كثيرة الحدود مع أمثال من الأعداد الصحيحة. لكن الأمر ليس سيئاً، فلو كانت P نظرية مكتملة، لأصبح وجود علماء الرياضيات أمراً لا فائدة منه.

لِمَ ذلك؟ لأن اكتمال النظرية P يعني أن نتمكن من بناء آلة منتهية يمكنها الإجابة عن أي سؤال حول الأعداد الطبيعية. على سبيل المثال، إذا أردنا أن نعرف ما إذا كانت حدسية غولدباخ صحيحة أم خاطئة، سنسأل الآلة التي ستكتب لنا جميع النظريات، وسيظهر لنا إما إثبات للحدسية أو نفي لها[3]. أما في ضوء نظرية غودل عن عدم الاكتمال، وعدم وجود نظرية مكتملة، فإن أي آلة نسألها ستستمر بكتابة النظريات إلى الأبد بدون أن تعطي إثباتاً للحدسية أو نفياً لها. الأمر الغريب هنا أن عدم تقديم الآلة نفياً للحدسية يعني أن الحدسية صحيحة! على كل حال، لدينا المزيد لنعرفه حول أهمية عدم اكتمال النظرية P.

نقول عن الرواية التي تتحدث عن شخص ما إنها متسقة إذا لم تقدِّم جملة تتضمن إثباتاً لقضية ما ونفياً لها في الوقت ذاته. مثلاً، الرواية التي تضمّ الجملة: «كان جون إنساناً ذا مظهر طبيعي تماماً. ذات صباح، بينما كان يربط شريط حذائه، مدّ ذراعه الثالثة تحت السرير والتقط عيناً زجاجية».

3- تقول حدسية غولدباخ إن كل عدد زوجي أكبر من العدد 2 هو مجموع عددين أوليين. من الناحية الفنية، لا يُعتبر العدد 1 أولياً. لكن العدد 2 أولي لأنه يضم قاسمين بالضبط.

تحمل هذه الجملة تناقضاً، فلا يمكن لـجون أن يكون إنساناً طبيعياً وأن يملك ثلاث أذرع في الوقت ذاته.

وفقاً لتعريفات جدول الحقيقة المذكور سابقاً، فإن جملة من النموذج $(A\ \&\ \sim A)\rightarrow D$ تُعتبر حشواً. لذا إذا أثبت النظام الشكلي P صحة جملة ونفاها في الوقت ذاته، فيمكنه إثبات أي جملة على الإطلاق. بعبارة أخرى، إذا أثبت نظام ما تناقضاً، فسينهار ويقدِّم إثباتاً لكل الجمل في لغته. وهكذا لا يعود لسؤال هذا النظام عن صحة حدسية غولدباخ أي أهمية، لأنه سيثبت صحتها ويدحضها في الوقت ذاته.

تُختصر الجملة الرياضية «P نظام شكلي متسق» عادة بالرمز «$con(P)$»، ويمكن اعتبارها تمثِّل قولنا «$1\neq0$». وكما ذكرنا أعلاه، توضح نظرية عدم الاكتمال الأولى أن P ليست نظرية –أو نظاماً شكلياً– مكتملة. أما نظرية عدم الاكتمال الثانية، فتُظهِر أن النظام الشكلي P لا يمكنه إثبات اتساقه، أي لا يمكنه إثبات $con(P)$.

لا تظهر $con(P)$ بوضوح كجملة في لغة النظام P، لكننا سنبين في القسم التالي أن هناك طريقة لترميز الصيغ تُسمَّى «ترقيم غودل»، والتي يمكننا من خلالها العثور على جملة في لغة P تعبِّر عن $con(P)$. وعلى الرغم من اعتقادنا بأن النظام الشكلي P متسق في الواقع، إلا أنه يستحيل إثبات هذه الحقيقة على أساس الافتراضات التي يجسِّدها النظام الشكلي P.

في أوائل القرن العشرين، تمّ العثور على عدد من المفارقات في نظرية المنطق والمجموعة: مفارقة بورالي فورتي، ومفارقة راسل، ومفارقة بيري، ومفارقة ريتشارد. كان الشك منتشراً بين علماء الرياضيات بأن استخدام اللانهايات الفعلية سيؤدي حتماً إلى تناقض. لكن الممارسة الرياضية تتطلب استخدام كائنات لانهائية مثل مجموعة الأعداد الطبيعية، ومجموعة الأعداد الحقيقية، والأعداد الترتيبية فوق المنتهية.

في هذا الإطار، قدَّم ديفيد هيلبرت بحثه الكلاسيكي عام 1925، «عن اللانهاية». كان هيلبرت أحد أكثر علماء الرياضيات تنوعاً في أبحاثه، وقدَّم أعمالاً مهمة في التحليل ونظرية التابع ونظرية الأعداد والهندسة وأسس

الرياضيات. كما كان معتاداً على التعامل مع المجموعات اللانهائية، إلا أنه شعر أن على الرياضيات أن تستند بطريقة ما إلى اعتبارات منتهية تماماً.

اقترح هيلبرت أساساً شكلياً للرياضيات. ورأى أن بإمكاننا النظر إلى الرياضيات باعتبارها عملية اشتقاق سلاسل معينة من الرموز من سلاسل معينة أخرى وفقاً لقواعد معينة. وهكذا، على الرغم من أننا نجد أن أي كتاب حول نظرية المجموعة يناقش كيانات لانهائية، إلا أن ما يقدِّمه الكتاب فعلاً هو عرض طرق لتحويل سلاسل معينة من الرموز (بديهيات نظرية المجموعة) إلى سلاسل معينة أخرى من الرموز (فرضيات نظرية المجموعة).

تتضمن دراسة كيفية معالجة سلاسل الرموز هذه ما أطلق عليه هيلبرت «نظرية البرهان». ولتجنب إعادة تقديم اللانهايات والاضطرار للبدء من جديد، طلب هيلبرت أن تُستخدَم الطرق النهائية فحسب. وتكون الطريقة نهائية إذا لم تتضمن عمليات بحث لانهائية وأمكن تحديدها كاملاً بعدد محدود من الكلمات. شعر هيلبرت بضرورة إضفاء طابع شكلي على الرياضيات كلها وإيجاد دليل نهائي على اتساق الرياضيات. أصبح هذا المشروع معروفاً باسم «برنامج هيلبرت»، وفي عام 1925 رأى هيلبرت أن الحلّ أصبح قريباً:

«إن مشكلة الاتساق قابلة للحلّ تماماً. وكما يمكننا أن ندرِك على الفور أنه لا يمكن الحصول على $1\neq1$ كصيغة نهائية بدءاً من البديهيات والقواعد المعروفة، فإن $1\neq1$ ليست صيغة قابلة للإثبات. وتكمن هذه المهمة أساساً في مجال الحدس، كما هو الحال عند إثباتنا أن $\sqrt{2}$ عدد غير منطقي من خلال إثبات أنه من المستحيل إيجاد عددين a وb يحققان المساواة $a^2=2b^2$، وهي مشكلة إيجاد عددين لهما خاصية معينة. وبالمقابل، هدفنا هو إظهار أنه من المستحيل إيجاد برهان من نوع معين»[4].

كما ذكرنا أعلاه، نستخدم $con(P)$ للدلالة على الجملة: «لا يقوم النظام

4- أُعيد طباعته في Jean von Heijenoort, *From Frege to Gödel*, p. 383.

الشكلي P بإثبات أي تناقض». وتُظهِر النظرية الثانية لعدم الاكتمال أنه لا يمكن إثبات $con(P)$ على أساس الطرق الموجودة في ذاته. كانت هذه ضربة حقيقة لبرنامج هيلبرت، بالرغم من أن غودل أشار في نظريته أنه من الممكن تصور براهين محددة على $con(P)$ لكن ليس وفق الطرق الموجودة في P[5].

إن اتساق P واضح بالنسبة للأفلاطونيين. فيمكن ببساطة أن نلاحظ أن جميع بديهيات P صحيحة في مجموعة الأعداد الطبيعية مع التعريفات المعتادة للجمع والضرب. وإذا كانت كل بديهيات P صحيحة في مجموعة الأعداد الطبيعية، فجميع نظريات P صحيحة أيضاً فيها. ولأن ما من تناقض يصحّ بالنسبة للأعداد الطبيعية لذلك من المستحيل أن توجد نظرية متناقضة في P. وهكذا نعلم أن الجملة «لا يقوم النظام الشكلي P بإثبات أي تناقض». صحيحة، أي إن $con(P)$ حقيقة.

بالطبع، إن صحة مخطط الاستقراء في مجموعة الأعداد الطبيعية ليس سوى إجراء منتهٍ. في عام **1940**، تمكن عالم الرياضيات جيرهارد جنتزن من استنتاج أن العملية اللانهائية التي شرحناها تواً تكافئ تصوراً لجميع الأعداد الترتيبية وصولاً إلى العدد الترتيبي ε_0 الذي ناقشناه في قسم «من أوميغا إلى إبسيلون–صفر»[6].

مع كل ما سبق، إن نظرية عدم الاكتمال الأولى هي التي توجِّه ضربة قاضية لبرنامج هيلبرت الشكلي. لا تثبت هذه النظرية أن النظام الشكلي P غير مكتمل فحسب، بل إنه لا يوجد نظام شكلي منتهٍ يمكنه الإجابة على نحو صحيح على جميع الأسئلة حول جمع وضرب الأعداد الطبيعية.

لم يكن هيلبرت معارضاً صريحاً لوجهة النظر الأفلاطونية التي تقول بوجود الكائنات الرياضية اللانهائية في مشهد العقل. في الواقع، أشار

5- Kurt Gödel, «On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems», in: Martin Davis, ed., *The Undecidable*, p. 37. وهذه هي النسخة الأصلية من بحث غودل عام 1931.

6- لا يوجد تقرير مشهور لعمل غيرهارد جينتزن عموماً. توجد ملاحظة تقنية مع مراجع في: Gaisi Takeuti, *Proof Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1975).

هيلبرت إلى الفئة الشاملة لكل المجموعات على أنها «الفردوس» الذي لا يريد الخروج منه. ومع ذلك، اعتقد في الوقت نفسه أن النقاش حول اللانهايات الفعلية رفاهية يمكن الاستغناء عنها. واعتقد أنه من الممكن العثور على نظام شكلي مكتمل للرياضيات كلها، وأنه يمكننا بعد ذلك النظر إلى الرياضيات باعتبارها لعبة رموز منتهية تعتمد على هذا النظام المكتمل. كانت فكرته الأخيرة خطأ، فلا يوجد نظام منتهٍ يمكنه استنفاذ اللانهاية الفعلية. ولا يمكن الاستغناء عن حدس علماء الرياضيات في التعامل مع المجموعات اللانهائية.

إن هذا الحدس الذي يمنح إدراكاً مباشراً للانهاية هو الذي يكشف لعلماء الرياضيات بديهيات جديدة تُضاف إلى النظام الشكلي القديم؛ فالعمل على النتائج المنطقية لبديهيات معينة يمكن أن يكون إجراء منتهياً تماماً، لكن تحديد البديهيات التي يجب استنباط النتائج منها هو عملية إبداعية لانهائية لا يمكن تفسيرها أو محاكاتها آلياً.

التمثيل الذاتي

أُثبتت نظرية عدم الاكتمال الأولى من خلال إيجاد جملة رياضية في لغة النظرية P لا يمكن إثباتها من خلال P ذاتها. وتُعتبر هذه الجملة التمثيل الذاتي للعبارة «هذه الجملة غير مثبتة في P». قد يستمتع القارئ باكتشاف السبب وراء صحة هذه الجملة وعدم إمكانية إثباتها من خلال P.

أولاً، كيف يمكن التعبير عن هذه الجملة بلغة النظام الشكلي P الدقيقة؟ هناك نوعان من الصعوبات. الصعوبة الأولى أن نفهم كيفية تمثيل المفهوم المعقد «يمكن إثباته من خلال P»، والثانية أن نتمكن من جعل الجملة «تمثّل ذاتها» بلغة P، فالتعبير «هذه الجملة...» غير متوفر في اللغة الشكلية.

تُحلّ الصعوبة الأولى من خلال ما يُعرف بـ«ترقيم غودل». وفيه نجد طريقة لتعيين رقم رمزي لكل جملة في لغة P، فنجد عندها أن الجملة «n هي رقم غودل لجملة قابلة للإثبات في P»، قابلة للتمثيل في النظام P. وتُحل الصعوبة الثانية عن طريق نوع من الحجة القطرية، والتي سنشرحها أدناه.

لكن أولاً، يجب أن نصف عملية ترقيم غودل ببعض التفصيل. وليعذرني القرّاء إن شعروا بكثرة التفاصيل التقنية الدقيقة.

توجد طرق لا حصر لها لاستخدام «ترقيم غودل». سنستخدم هنا ترميزاً شبيهاً بالذي رأيناه سابقاً في قسم «مكتبة بابل». نبدأ أولاً بتعيين رقم رمزي لكل رمز بلغة P.

~	1	[	11	p	21
V	2	]	12	q	22
&	3	S	13	r	23

→	4	+	14	y	24
↔	5	×	15	z	25
∃	6	=	16	v_0	26
∀	7	0	17	v_1	27
(	8	M	18	v_2	28
)	9	N	19	...	...

يمكن ترميز أي سلسلة من الرموز باستبدال كل رمز بما يقابله من هذه الأرقام وفصلها بأصفار. على سبيل المثال، نرمّز SSS0 كالتالي: 13013013017. وهكذا، نجد أن ترميز البديهية:

$$(\forall x)[x+0=X]$$

هو كالتالي:

80702309011023014017016023012

يمكن إعادة صياغة تعاريف مصطلحات وصيغ وبديهيات النظام الشكلي P التي تعرفنا عليها في القسم الأخير لتنطبق على أرقام الترميز هذه. مثلاً، يمكن محاكاة تعريف مصطلح $\mathrm{Trm}(x)$ يعرِّف خاصية ما، ويتم ذلك على النحو التالي:

1) إذا كان $n \geq 17$ ولا توجد أصفار في الامتداد العشري له، إذاً نكتب $\mathrm{Trm}(x)$؛

2) إذا وُجد $\mathrm{Trm}(n)$ و$\mathrm{Trm}(m)$، إذاً نكتب .$\mathrm{Trm}(13080n09)$، و$\mathrm{Trm}(80n09014080m09)$، و$\mathrm{Trm}(80n09015080m09)$؛

3) نكتب $\mathrm{Trm}(x)$ فقط إذا كنا نحصل على x بتسلسل منته من تطبيق الخطوتين 1) و2).

على المنوال نفسه، يمكن تعريف التوكيد $\mathrm{Fm}(x)$ الذي يصح للأرقام الرمزية للصيغ ذات المعنى فحسب. كما يمكننا العثور على التوكيد $\mathrm{AxP}(x)$ الذي يصحّ لبديهية ما في النظام الشكلي P.

ويمكننا أيضاً توسيع مفهوم ترقيم غودل إلى متتاليات من الجمل

بالطريقة التالية. لنفترض أن «$A_1, A_2, ..., A_n$» متتالية من الجمل بلغة P. يمكننا ترميز هذه المتتالية باستبدال كل حدٍّ من حدودها بالرمز الخاص به وفصلها بأصفار.

والآن، نظراً لأنه يمكن للمرء أن يحكم على نحو ميكانيكي تماماً بأن أي متتالية من الجمل يمكن أن تشكِّل برهاناً من النظام الشكلي P، فإن هناك توكيداً $Prov_p(m,n)$ يصح عندما ترمِّز m برهاناً للجملة المُرمَّزة بـ n. وهنا يمكننا رؤية كيف نحوِّل الجملة «A مثبَتة من خلال النظام الشكلي P» إلى الجملة المكافئة حول الأعداد الطبيعية: $(\exists m)[Prov_p[m,A]]$. ونوضِّح هذا التكافؤ بين الجملتين فيما يلي.

إذا كان هناك برهان لـ A من النظام الشكلي P، فيمكن ترميز البرهان بأرقام معينة كالتالي $(\exists m)[Prov_p\ [m,A]]$. بالمقابل، إذا كان هذا الترميز صحيحاً، فلا بدَّ من وجود عدد طبيعي M يحقق $Prov\{M,A\}$، ويمكن ترميز M لإيجاد برهان لـ A في النظام الشكلي P.

سنخطو الآن خطوة إلى الأمام. بدلاً من السؤال عن صحة الجُمل النظرية، سنسأل عن قابلية اشتقاق المتتاليات المختلفة في النظام الشكلي P. علينا أن نتذكر دائماً أنه على الرغم من أن P مستوحى من الأعداد الطبيعية، إلا أنه مجرد مجموعة من القواعد لاشتقاق سلاسل معينة من الرموز.

كان هيلبرت، وغيره من الشكليين، يأملون بأن يمكن استبدال كل إشارة إلى «الحقيقة» بإشارة إلى «الإثبات» بواسطة النظام الشكلي P، أو بواسطة نظام شكلي أفضل مثل T. وإلى حدٍّ ما، كانت آمالهم هذه مبررة بعض الشيء.

على سبيل المثال، لا تعبِّر الجملة $(\forall m)(\forall n)[m+n=n+m]$ عن حقيقة عددية فحسب، بل هي سلسلة من الرموز المشتَقة من النظام الشكلي P أيضاً. وليست الجملة 2+3=5 حقيقة عددية فحسب، بل إن سلسلة الرموز التي تعبِّر عنها $S^2 0+S^3 0=S^5 0$، والتي تُكتب بالتفصيل: SS0+SSS0=SSSSS0، هي سلسلة مشتَقة من النظام الشكلي P. في الواقع، يمكن تمثيل كل الحقائق المألوفة حول الأعداد الطبيعية بسلاسل من الرموز القابلة للإثبات في النظام الشكلي P. لكن كما سنرى، من الممكن العثور

على سلسلة من الرموز التي تعبّر عن حقيقة ما حول الأعداد الطبيعية غير قابلة للإثبات في النظام الشكلي P.

أشير هنا إلى أنه حتى لو كان النظام الشكلي ناجحاً، وهو أمر مستحيل، فإن فكرة «الحقيقة» ستبقى عصية على الإمساك والتحديد. لأن قولنا «يمكن إثبات A من النظام الشكلي P» بدلاً من القول «A جملة صحيحة» يكافئ قولنا إن $(\exists m)[Prov_p\ [m,A]]$ جملة صحيحة، وهذا ما يعيدنا إلى حيث بدأنا... يمكن أن نجد هنا بعض الفائدة في هذا النكوص، لأن التحقق من صحة هذه الجملة يتطلب بحثاً واحداً لانهائياً فقط في مجموعة الأعداد الطبيعية، ولكن مع ذلك فإننا لم نستطع أن نتجنب اعتبار مجموعة الأعداد الطبيعية كياناً محدداً.

دعونا نرى إن كان باستطاعتنا إيجاد الجملة التي تستبعد مثل هذا النكوص الجزئي في اعتمادنا على اللانهاية الفعلية. خصص غودل الجزء الأكبر من بحثه عام 1931 لإظهار أن التوكيد $Prov_p\ (m,n)$ قابل للإثبات في النظام الشكلي P. يعني ذلك أن غودل يوضِّح على نحو غير مباشر أنه يجب أن توجد صيغة $Prov_p$ في لغة P حيث أياً تكن m وn:

$$Prov_p\ [m,n] \leftrightarrow (Prov_p\ [S^m0, S^n0]\ \text{قابل للإثبات في } p)$$

و

$$\sim Prov_p\ [m,n] \leftrightarrow (Prov_p\ [S^m0, S^n0]\ \text{قابل للإثبات في } p)\sim$$

أي إن التوكيد قابل للإثبات، ونفيه قابل للإثبات أيضاً. ومن المؤكد أن الدليل على وجود مثل هذه الصيغة غير مباشر، لأن كتابته بلغة P المحدودة قد يحتاج لمئات الصفحات. ومع ذلك، لا يترك برهان غودل أدنى شك في إمكانية كتابته بالفعل.

ذكرنا سابقاً أن بالإمكان التعبير عن الجملة «A قابلة للإثبات في النظام الشكلي P» بالعبارة العددية النظرية «$(\exists m)[Prov_p\ [m,A]]$». كيف لهاتين الجملتين أن تكونا ذواتي صلة بالجملة «$(\exists m)[Prov'_p\ [m,S^A0]]$ قابلة للإثبات في P»؟ إن تفسير ذلك هو أن إثبات A بواسطة P يسمح بوجود ترميز لهذا الإثبات، وبالتالي -لأن الإثبات ذاته قابل للإثبات- فإن

$Prov'_P\ [S^M0,S^A0]$ قابلة للإثبات في P. وبتطبيق مثال من المخطط Q2 وتطبيق قاعدة الإثبات، نجد أن $(\exists m)[Prov_P\ [m,S^A0]]$ قابلة للإثبات في P. وبالتالي نثبت أن الجملة الأولى تتضمّن الثالثة.

بالمقابل، يفشل الافتراض المعاكس. أي إننا قد نثبت $(\exists m)[Prov_P\ [m,S^A0]]$ في النظام P بالرغم من إثباتنا نفيها أيضاً $\sim Prov'_P\ [S^M\ 0,S^A0]$ لكل عدد طبيعي محدد M. في هذه الحالة، يظهِر النظام الشكلي أن بإمكانه أن يثبت الجملة A، وفي الوقت ذاته يظهِر أن أي إثبات يقدِّمه ليس جيداً. إن نظرية تؤدي إلى مثل ذلك هي نظرية تتضمن خطأ ما. سنرى في القسم التالي أن هذه النظرية تُدعى ω-غير متسقة.

يمكن لنا في كثير من الأحيان أن نتجاهل التمييز بين الإثبات وإثباته، أي بين $Prov_P$ و $Prov'_P$، والتمييز بين العدد الطبيعي وترميزه، أي بين M و $S^M\ 0$. سنبدأ بالنقاش على نحو غير شكلي، لكن يجب ذكر ملاحظة شكلية دقيقة قبل ذلك. في اللغة، نعبِّر عن اتساق النظام الشكلي P بالجملة «لا يثبت P أي تناقض». ويمكن التعبير عن ذلك على نحو مكافئ بمصطلحات عددية نظرية بأن الجملة «$\sim(\exists m)[prov_P\ [m, 17016013017]]$» صحيحة. (يمكن أن نعود إلى جدول الترميز سابقاً لمعرفة معنى 17016013017). بالمقابلة مع هذه الجملة العددية النظرية، يمكننا تشكيل السلسلة التالية التي تُعرف بـ $con(P)$ بلغة P: $\sim(\exists m)[prov'_P\ [m, 17016013017]]$. في القسم التالي، سنكتشف النتيجة المذهلة بأن النظام الشكلي متسق إذا وفقط إذا لم يتمكن من إثبات $con(P)$!

هذه النتيجة التي ذكرناها تواً، هي نظرية عدم الاكتمال الثانية، والتي تتوضح بسهولة بمجرد إثباتنا نظرية عدم الاكتمال الأولى. وكما ذكرنا سابقاً، لن نلتزم بالفروق المملّة بين الإثبات وإثباته وبين العدد الطبيعي وترميزه، لأن ما نحن بصدد مناقشته مربك بما فيه الكفاية.

إن هدفنا هو إيجاد الصيغة G_P وهي $G_P \leftrightarrow \sim(\exists m)[prov_P\ [m,G_P]]$، حيث تكون كلتا الجملتين قابلتين للإثبات في النظام الشكلي P. لتحقيق ذلك، نعرِّف الصيغة $D(n)$ كما يلي:

$D(n)$ تكافئ (إذا كانت n هي ترقيم غودل للصيغة A التي تحوي متغيراً واحداً، فإن $A[n]$ غير قابلة للإثبات في النظام الشكلي P).

وبالتالي تصحّ الصيغة $D(n)$ إما في حال أنها ليست ترقيم غودل لصيغة بمتغير واحد، أو في حال كانت ترقيم غودل لصيغة بمتغير واحد ولكنها غير قابلة للإثبات في النظام الشكلي P. وبعبارات تقنية نقول:

$$D(n)\leftrightarrow\sim(\exists m)[prov_P\ [m,Sub(n,n)]]$$

حيث $Sub(n,n)$ هي ترميز الجملة بترقيم غودل عندما نضع n مكان المتغير في الصيغة المُرمَّزة بـ n.

أصبح الآن من الممكن تمثيل $Prov_P$ وSub وD بلغة النظام الشكلي P، لذا يوجد عدد ما d هو رقم غودل للصيغة D التي تحوي متغيراً واحداً n. وبذلك تكون الجملة G_P التي نبحث عنها هي $D[d]$.

تقول الجملة $D[d]$، إذا كان [d] ترميزاً للصيغة A، فإن $A[d]$ غير قابلة للإثبات في النظام الشكلي P. لكن [d] ترمِّز D، لذا فإن $D[d]$ تقول إن $D[d]$ ذاتها ليست قابلة للإثبات في النظام الشكلي P. إذاً، الصيغة G_P تؤكد عدم قابليتها للإثبات من النظام الشكلي P. وإذا حاولنا كتابتها باللغة العادية سنحصل على الجملة اللانهائية: «لا يمكن للنظام الشكلي P أن يثبت أن النظام الشكلي P أن يثبت أن النظام الشكلي P أن يثبت أن ...». وإذا فكرنا بالصيغة G_P بهذه الطريقة فيصبح من الواضح أن G_P ذاتها تكافئ الجملة «لا يمكن للنظام الشكلي P أن يثبت G_P»، فكل ما نقوم به هو إضافة «لا يمكن للنظام الشكلي P أن يثبت» أمام المزيد من تكرار الجملة ذاتها، أي أمام متتالية-ω من هذه الجملة. (نتذكر هنا أن $1+\omega=\omega$).

كان إنجازاً عظيماً لـغودل عندما أظهر في بحثه عام 1931 كيفية بناء الجملة G_P الموجودة بالكامل في النظام الشكلي P. ونلاحظ أن هناك خاصتين أساسيتين يجب أن يكونا للنظام الشكلي لكي يحقق ذلك: 1) أن يكون قابلاً للوصف على نحو منته؛ 2) أن يكون غنياً بما فيه الكفاية. ولأن النظام الشكلي P يحقق هاتين الخاصتين، لذا يمكن تمثيل التوكيد $Prov_P$ بصيغة منه، كما يمكن تمثيل التوكيد D والجملة G_P بلغته.

للتوضيح، تأتي أهمية الخاصية الأولى، 1)، من أنه بإمكاننا أن نحدِّد آلياً إذا كان تسلسل معين من الصيغ يشكِّل إثباتاً صحيحاً من النظام الشكلي P. بمعنى آخر، تقول الخاصية 1) إن هناك توكيداً عددياً نظرياً ما، وليكن $Prov_P$ (m,n)، يصحّ إذا وفقط إذا كانت m ترمِّز إثباتاً من P للجملة التي ترمِّزها n. أما أهمية الخاصية الثانية، 2)، فتأتي من أن لغة النظام الشكلي P غنية بما فيه الكفاية، والبديهيات التي يضمّها قوية بما فيه الكفاية، لضمان وجود صيغة $prov'_P$ تثبت الإثبات $Prov_P$ بالطريقة المذكورة أعلاه.

يمكن إيجاز ما سبق بقولنا إن الخاصية الأولى تمكّننا من تحويل الفكرة الرياضية «قابل للإثبات من P» إلى توكيد عددي نظري؛ وإن الخاصية الثانية تمكننا من تمثيل حقيقة هذا التوكيد العددي النظري بواسطة قابلية إثبات تسلسل معين من الرموز في P.

يمكن تنفيذ البناء الكامل لهذا القسم لأي نظرية تملك الخاصتين 1) قابلة للوصف على نحو منته؛ 2) قوية مثل النظام الشكلي P. إذاً، لأي نظرية T توجد صيغة G_T بلغة T تؤكد عدم قابليتها للإثبات من T بمعنى $G_T \leftrightarrow \sim(\exists m)[prov_T[m,G_T]]$.

برهان غودل

كما في القسم الأخير، لنفترض أن T هي نظرية تتعلق بجزء معقد على نحو لانهائي من الكون المادي أو العقلي. سنفترض أيضاً أن T نظرية متسقة. ومجدداً، نعتبر G_T صيغة بلغة T حيث:

$$G_T \leftrightarrow \sim(\exists m)[prov_T[m,G_T]]$$

تنصّ الصيغة G_T على عدم وجود أعداد طبيعية من نوع معين، لذا من المنطقي أن نسأل عما إذا كانت هذه الصيغة جملة صحيحة أو خاطئة. نلاحظ أن G_T تكون صحيحة إذا لم يتمّ إثباتها بواسطة النظرية (أو النظام الشكلي) T، لذا إما أنها صحيحة وغير قابلة للإثبات في T، أو أنها خاطئة وقابلة للإثبات فيها. الآن، إذا افترضنا أن نظريتنا لا تثبت أي جملة خاطئة، عندها يمكننا استبعاد الاحتمال الثاني واستنتاج أن G_T صحيحة وغير قابلة للإثبات بواسطة T. وكما سنرى لاحقاً، يمكن الوصول إلى هذا الاستنتاج في ظل الافتراض بأن T نظرية متسقة.

إضافة إلى أن G_T جملة صحيحة أو خاطئة حول الأعداد الطبيعية، فإنه يمكن تمثيلها كسلسلة من الرموز بلغة T، ويمكن أن نسأل عما إذا كان الجملة G_T أو نفيها $\sim G_T$ قابلة للإثبات بواسطة النظام الشكلي T. نتذكر من قسم «النظم الشكلية» أن النظام الشكلي الذي يثبت جملة ما ونفيها في الوقت ذاته هو نظام غير متسق؛ وفي حال عدم إمكانية إثبات جملة ما أو إثبات نفيها فإن النظام الشكلي غير مكتمل، لأنه لا يقرّر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة.

توجد ثماني مجموعات ممكنة من الناحية النظرية للحقيقة مع إمكانية

إثبات جملة ما ونفيها، على الرغم من أن ثلاث مجموعات فقط منها ممكنة من الناحية العملية.

	الجملة G_T ونفيها $\sim G_T$ قابلتان للإثبات	الجملة G_T ونفيها $\sim G_T$ غير قابلتين للإثبات	الجملة G_T قابلة للإثبات وحدها	الجملة المنفية $\sim G_T$ قابلة للإثبات وحدها
G_T صحيحة	مستحيل	T نظام شكلي متسق لكنه غير مكتمل	مستحيل	T نظام شكلي متسق لكن المتتالية-ω غير متسقة
G_T خاطئة	T نظام شكلي غير متسق	مستحيل	مستحيل	مستحيل

لِمَ من المستحيل أن تكون الجملة G_T قابلة للإثبات وحدها؟ السبب في ذلك أن إثبات النظام الشكلي T للجملة G_T يقتضي أنه سيثبت نفيها $\sim G_T$ أيضاً. وذلك لأن إثبات جملة ما يعني قابليتها للترميز، أي إن السلسلة التي ترمِّزها صحيحة، وبالتالي يكون إثبات الإثبات صحيحاً. وبافتراضنا أن جدول الحقيقة Q2 جزء من النظام الشكلي T، ويمكن من خلاله الانتقال من «T يثبت أن $prov_T[m,G_T]$» إلى «T يثبت أن $(\exists m)prov_T[m,G_T]$». لكن الجملة $(\exists m)prov_T[m,G_T]$ هي النفي $\sim G_T$، إذاً، النظام الشكلي T يثبت $\sim G_T$.

الآن، أصبحنا نعرف أن النظام الشكلي T يثبت الجملة G_T ونفيها $\sim G_T$. لنتأمل في هذه الجمل الأربع المكافئة لهذه الحقيقة:

1. إذا كان النظام الشكلي T يثبت الجملة G_T، فإنه يثبت نفيها $\sim G_T$ أيضاً.
2. إذا كان النظام الشكلي T يثبت الجملة G_T، فإن النظام الشكلي T غير متسق.
3. إذا كان النظام الشكلي T متسقاً، فإن النظام الشكلي T لا يثبت الجملة G_T.
4. إذا كان النظام الشكلي T متسقاً، فإن الجملة G_T صحيحة.

إن الجملة 1) تدل على الجملة 2)، لأن أي نظرية تثبت جملة ما ونفيها في الوقت ذاته فإنها غير متسقة. كما أن الجملة 2) تدلّ على الجملة 1)، لأن أي نظرية غير متسقة تثبت أي جملة. والجملة 2) تكافئ الجملة 3) لأنها تدلّ على المعنى ذاته. والجملة 3) والجملة 4) متكافئتان من تعريف الجملة G_T.

يمكننا جمع هذه الحقائق كما يلي: إذا كان النظام الشكلي T متسقاً، فإن الجملة G_T صحيحة، لكنها غير قابلة للإثبات بواسطة T.

في هذه الحالة، ما زال بإمكاننا أن نتساءل إذا كان نفي الجملة G_T~ قابلاً للإثبات بواسطة النظام الشكلي T أم لا. إذا لم يتحقق ذلك، سنعرف حينها أن T غير مكتمل، لأنه لا يثبت G_T ولا G_T~ بلغة T. أما إذا أثبت T النفي G_T~، فعندها نعرف أنه يثبت جملة غير صحيحة... لذا فالنظام الشكلي T ليس صحيحاً.

مرة أخرى، يمكننا استبعاد هذا الاحتمال بافتراض أن النظام الشكلي T لا يثبت أي جملة غير حقيقية. لكن مفهوم «الحقيقة» مفهوم صعب التحديد. بدلاً من ذلك، يمكننا استبعاد الحالة التي يثبت فيها T النفي G_T~، من خلال الاشتراط بأن يكون T يحقق اتساق-ω. ويكون ذلك إذا لم يوجد لدينا في T أي علاقة A(m) تثبت أن $(\exists m)[A(m)]$ وتثبت أيضاً كلاً من الجمل A[0]~، A[1]~، A[2]~، A[3]~، ...

الآن، في الحالة التي يكون فيها T متسقاً، لا يوجد إثبات للجملة G_T بواسطة T، لذا تعبِّر كل من الجمل: $\sim Prov_T\,[0,G_T]$، $\sim Prov_T\,[1,G_T]$، $\sim Prov_T\,[2,G_T]$، ...عن حقيقة عددية نظرية قابلة للإثبات بواسطة T. وإذا كان T يحقق اتساق-ω، فإنه غير قادر على إثبات النفي G_T~ أيضاً، لأن G_T~ هي الجملة $(\exists m)prov_T\,[m,G_T]$، وهي كل جملة يتم دحضها بواسطة T.

يمكن لنا الآن أن نستعرض نظرية غودل الأولى في عدم الاكتمال:

إذا كان T نظاماً شكلياً يحقق أن يكون:

1) معطى على نحو متنه؛

2) T هو امتداد لـ P؛

3) T متسق؛

4) T يحقق اتساق-ω.

إذاً، T نظام شكلي غير مكتمل.

لنوضِّح القليل حول كل من هذه الشروط. يعني الشرط الأول أن هناك إجراءً خوارزمياً محدّداً يمكن تطبيقه على أي عدد لتحديد كمية محدودة من الوقت سواء كان هذا العدد يرمِّز بديهية في النظام أم لا. بمجرد أن نحدّد لغة النظام الشكلي ونضع ترميزاً بسيطاً مثل المذكور في القسم الأخير، فيمكننا عندها التفكير بالنظام الشكلي T كمجموعة من الأعداد الطبيعية. إن هذه المجموعة هي ما يُعرف عادة بـ «العودية» أو «قابلية الحساب».

أي نظرية يمكن ألا تحقق الشرط الأول؟ لنفرض أن المجموعة Tr هي مجموعة كل الجمل بلغة النظام الشكليP ، والتي تعبِّر عن حقائق تتعلق بالأعداد الطبيعية. إن Tr مكتمل، لأن أي جملة هي إما:

- صحيحة وبديهية وبالتالي قابلة للإثبات فيه؛
- أو خاطئة ونفيها هو بديهية وبالتالي قابلة للإثبات فيه أيضاً.

إذاً، النظام Tr يثبت إما الجملة أو نفيها، ولا يثبتهما معاً في الوقت ذاته. ولأن Tr يحقِّق أيضاً الشرطين الثاني والرابع، لذا يمكننا الاستنتاج «حسب نظرية غودل الأولى لعدم الاكتمال، أن مجموعة كل الجمل العددية النظرية الصحيحة Tr لا يمكن أن تُعطى على نحو متنِهٍ».

تاريخياً، كانت عملية التفكير معاكسة لهذا الإجراء تماماً. اكتشف غودل أولاً أن الحقيقة غير قابلة للتعريف، وتوصّل إلى استنتاج مفاده أنه يجب أن توجد جملة صحيحة ولا يمكن إثباتها، وعندها شرع في بناء مثل هذه الجملة (الجملة G_T التي رأيناها سابقاً). وأودّ أن أتوسع بالشرح هنا قليلاً.

إن الحقيقة غير قابلة للتعريف في العبارة الدقيقة التالية: إذا كان T نظاماً شكلياً ممتداً من P، إذاً لا توجد صيغة Tru(n) في لغة T تجعل من الجملة A مكافئة لإثباتها، أي $A \leftrightarrow Tru[A]$. إن هذه الحقيقة مثبتة بالحجة اللاعقلانية، فلو أمكن التعبير عن الفكرة «جملة صحيحة بواسطة T»، فإن

مفارقة الكاذب ستظهر أمامنا. لنفترض أن هناك توكيداً Tru كما هو موضح أعلاه، ثم لنفترض أن $E(n)\leftrightarrow\sim Tru[Sub[n,n]]$، وكما في «التمثيل الذاتي»، Sub[n,n] هي تمثيل للصيغة A[n] عندما يكون تمثيل A هو n، والصيغة A تملك متغيراً واحداً. أخيراً، نعتبر e تمثيلاً لـ E، ونشكِّل الجملة E[e] بواسطة T حيث الجملة تكافئ نفيها: $E[e]\leftrightarrow\sim E[e]$. عندها تكون الجملة E صحيحة إذا وفقط إذا كانت خاطئة، وهذا تناقض. لذا يجب أن نرفض الافتراض الأولي بوجود تعريف صحيح للحقيقة.

وصلنا هنا إلى تمييز فرق بين Tr و Pr، إذا اعتبرنا أن Tr هي المجموعة التي تضمّ كل الجمل الصحيحة بلغة T، و Pr هي المجموعة التي تضمّ كل الجمل القابلة للإثبات بواسطة T. وذلك لأننا أظهرنا تواً أن المجموعة Tr غير قابلة للتعريف بأي صيغة بواسطة T، ونعرف من القسم الأخير أن المجموعة Pr قابلة للتعريف بصيغة بواسطة T، وهي الصيغة $A\in Pr\leftrightarrow(\exists m)$ $[Prov_T[m,A]]$. ومن هذا الفرق نجد أن $Tr\neq Pr$.

إذا افترضنا أن جميع البديهيات وقواعد الاستدلال في T صحيحة، فيمكننا استنتاج كل ما يمكن إثباته بواسطة T هو صحيح أيضاً، وأنPr تحوي أو تساوي Tr، أي: $Pr\subseteq Tr$. ومن خلال الفقرة الأخيرة، نعلم أن هذا الاحتواء صحيح، أي إن: $Pr\subset Tr$.

إن ذلك يعني وجود جملة في لغة T صحيحة وغير قابلة للإثبات. ولأن T لا يثبت أي جملة خاطئة، فإن نفي هذه الجملة غير قابل للإثبات أيضاً. لذا فإن هذه الجملة غير قابلة للإقرار بواسطة T، وبالتالي، T نظام شكلي غير مكتمل.

قال غودل إن سلسلة التفكير هذه هي التي دفعته إلى اكتشاف نظرية عدم الاكتمال الأولى[7]. ويختلف هذا الدليل التجريبي عن النسخة التي صدرت عام 1930 في نقطتين؛ الأولى أن الدليل الاستدلالي على وضوح المفهوم

-7 انظر: Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy*, p. 9, and Gödel's «On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems», pp. 63-65. أُعيدت طباعته في: Martin Davis, ed., *The Undecidable*.

اللانهائي لـ «الحقيقة» يكمن في افتراض أن جميع بديهيات النظام الشكلي صحيحة، في حين أن برهان عام 1930 لا يعتمد على هذه الفكرة، ويتطلب أن يكون النظام الشكلي متسقاً فحسب؛ أما النقطة الثانية فهي أن الدليل الاستدلالي يظهِر وجود جملة ما غير قابلة للإقرار بواسطة النظام الشكلي، بينما يظهِر برهان عام 1930 الصيغة المحددة G_T غير القابلة للإقرار.

يمكن أن نذكر مثالاً على نظرية لا تحقق الشرط الأول، وهي H، مجموعة كل الجمل الحسابية في حساب بيانو والتي يمكن أن يتعلمها البشر. تحقّق هذه المجموعة الشرط الثاني والثالث وربما الرابع أيضاً إذا كانت طرق التفكير لدينا سليمة. وبالتالي، إما أن يكون الشرط الأول غير محقق، ولا يوجد أي وصف محدّد للتفكير الرياضي البشري؛ أو أن المجموعة H غير مكتملة، وتوجد عبارة عددية نظرية ما لن تتمكن الرياضيات التي نعرفها من إقرارها أبداً.

قبل أن ننتقل إلى الشرطين الثاني والرابع، سأذكر ملاحظة أخيرة حول الشرط الأول. ليس من الضروري افتراض أن مجموعة بديهيات النظام الشكلي T عودية، أي قابلة للحساب، بمعنى وجود آلة مثالية يمكنها أن تقرّر صحة جملة ما أو خطأها. يكفي أن نفترض أن بديهيات T قابلة للعدّ، بمعنى وجود آلة يمكنها طبع جميع هذه البديهيات. النقطة الأساسية في كلتا الحالتين هي وجود آلة تطبع جميع فرضيات T. ويمكننا تخيل هذه الآلة تعمل بالتناوب بين وضعين. في الوضع الأول، تطبع الآلة البديهية تلو الأخرى. وفي الوضع الثاني تتفقد الآلة لائحة الفرضيات وتطبع كل الجمل التي تنتج من جمل أخرى.

يقول الشرط الثاني إن لغة T تتضمن جميع رموز لغة P، وإن كل بديهية في P هي بديهية أو فرضية في T. من الواضح أن ذلك صحيح بالنسبة لأي من النظريات، مثل نظرية المجموعة، التي وُضعت لتشمل أجزاء كبيرة من الرياضيات. بالنسبة لنا، من المفيد تجزئة الشرط الثاني إلى ثلاثة أجزاء: 1) يجب أن توجد متتالية Z_0، Z_1، Z_2، ... من مصطلحات لغة النظام الشكلي T حيث تكون العلاقة $k=z_n$ علاقة قابلة للحساب بالنسبة لكل من k وn؛ 2) يجب أن توجد الرموز ~ وx و y بلغة T حيث يكون لكل علاقة بين متغيرين

صيغة، ويكون تمثيل هذه الصيغة قابلاً للإثبات، وتدعى الصيغ التي تمثّل العلاقة بين متغير أو اثنين بالتوكيد العودي؛ 3) يجب أن يوجد رمز $\exists$، حيث تكون الجملة $(\exists m)[A(x)]$ قابلة للإثبات بواسطة T، أياً يكن التوكيد العودي $A(x)$. وبتحقيق هذه الأجزاء الثلاثة، نتأكد من وجود الصيغة G_T المطلوبة.

أي نظرية يمكن أن تفشل في تحقيق الشرط الثاني؟ إن أي نظرية تملك عدداً منتهياً من المصطلحات في لغتها ستفشل في تحقيق الجزء الأول من الشرط. وبالتالي، يمكننا الحصول على نظرية مكتملة للعلاقات المتبادلة لأول ألف عدد طبيعي، إذا لم تتمّ الإشارة إلى أي عدد أكبر من الألف. أيضاً، لا تحقّق النظرية التي لا تحتوي إلا على متغيرات فحسب الجزأين الأول والثاني من الشرط. على سبيل المثال، لا تذكر الهندسة الإقليدية أي نقاط أو مستقيمات محددة، بل تقتصر على جمل عامة حول وجود النقاط والمستقيمات والدوائر. في الواقع، أظهر ألفريد تارسكي أنه من الممكن توسيع الهندسة الإقليدية لتصبح نظرية مكتملة، أي نظرية تثبت أو تدحض أي جملة عامة حول النقاط والمستقيمات والدوائر. لكن عودة إلى نقاشنا، فإن أي نظرية تصف مثلاً العلاقة «أصغر من» بدون ذكر لأي عدد حقيقي، هي نظرية مكتملة بمعنى أن بإمكانها إقرار أي جملة حول هذه العلاقة.

إذا أخذنا النظرية P^+، وهي النظرية P ذاتها لكن مع استبعاد عملية الضرب والإبقاء على عملية الجمع فحسب، نجد أنها تحقّق الجزء الأول من الشرط ولا تحقّق الجزء الثاني منه. إن النظرية P^+ مكتملة، لأن أي جملة حول جمع الأعداد الطبيعية قابلة للإثبات أو الدحض بواسطتها. والنظرية الموازية لها، $P^\times$، التي تستبعد عملية الجمع وتبقي على عملية الضرب فحسب، هي نظرية مكتملة أيضاً. لكن وجود عمليتي الجمع والضرب معاً هو ما يعطي النظرية قوتها الكافية لتمثيل أي توكيد عودي. ولا يُضاف الكثير إلى النظرية مع توسيعها لتشمل عملية الرفع إلى أُس كعملية أولية. أما الجزء الثالث من الشرط، فيعرَّف ببساطة الرمز «يوجد»، «$\exists$»، وهو صحيح لأي نظرية عادية.

هل لنظرية عدم الاكتمال أي علاقة بنظريات الفيزياء؟ لا يبدو ذلك، لأن معظم نظريات الفيزياء لا تذكر كميات أو نوعيات لانهائية يمكن أن تُستخدَم كمتتالية z_n. وحتى لو وُجدت نظرية للكون تحدّد عدداً لانهائياً

من الجُسيمات أو أي فئة من الظواهر بأسماء فردية مثل z_0، z_1، z_2، ...، ولنسمِّها U، فلن تحقق الجزء الثاني من الشرط. ولتوضيح ذلك في مثال، لنفترض أن هناك عدداً لانهائياً من الكواكب، ولنحدّد كوكب الأرض بـ z_0، ونحدّد الكواكب الأخرى بـ z_1، z_2، ... حسب قربها من الأرض. لا يوجد سبب للاعتقاد بأن المجموعة z_n مميزة بأي خاصية بواسطة النظرية U. كان هناك فيزيائيون يميلون إلى الأعداد المحددة في الفيزياء، مثل يوهانس كيبلر وآرثر إيدينغتون، ويمكن من أعمالهم بناء فيزياء تتضمن النظام الشكلي P. كما يمكن أن نعتبر أن احتواء الفيزياء على بديهيات حول القياس دليل على احتوائها جملاً حول الأعداد، وبالتالي فهي تتضمن P. في هذه الحالات، يمكن تطبيق نظرية غودل، لكن بطريقة مملّة بعض الشيء.

نصل الآن إلى الشرط الثالث، وهو واضح تماماً. إن الحدّ الأدنى الذي يتطلبه هو عدم إثبات النظام الشكلي لجملة ونفيها في الوقت ذاته. بالطبع، لا يمكن أن نتبنى نظرية غير متسقة، فوفقاً لقواعد المنطق المعروفة، إذا أثبت نظام شكلي جملة ونفيها في الوقت ذاته، فهذا يعني أنه سيثبت أي جملة في لغته.

أما الشرط الرابع، فيمكن الاستغناء عنه. من خلال الشرطين الأول والثالث، يمكن أن نعثر على جملة لا يقرُّها النظام الشكلي T، أي لا يثبتها ولا ينفيها. وتُبنى مثل هذه الجملة مثلما تُبنى الجملة G_T، باستثناء أنه يمكننا القول إنها قابلة للإثبات إذا وُجد إثبات أقصر لنفيها. وسأترك للقارئ جواب السؤال: لِمَ لا يمكن للنظام الشكلي T إثبات هذه الجملة أو نفيها.

إذا حقق T الشرطين الأول والرابع، فإنه غير مكتمل. في عام 1930، أظهر غودل أن الجملة G_T تعادل نوعاً بسيطاً من الجمل النظرية العددية التي تتعلق بحلّ معادلة كثيرة الحدود اعتماداً على الأعداد الطبيعية. إن الحل الأخير لمسألة هيلبرت العاشرة[8] يظهِر هذه المسألة، فإذا تعاملنا مع كثير

8- Martin Davis, Yu. Matijacevic, and Julia Robinson, «Hilbert's Tenth Problem. Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution», in F. Browder, ed., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII* (Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1976), pp. 223–378.

حدود يضمّ ثمانين متغيراً مثلاً، وبأمثال من الأعداد الصحيحة، لن تكون له حلول من الأعداد الطبيعية. ولن يمكن إعطاء الجملة G_T التي تمثّل الحلّ على نحو صريح، فواحد على الأقل من الأمثال سيكون بطول آلاف الأرقام، لأنه يجب أن يرمِّز وصفاً للنظرية T. مكتبة سُر مَن قرأ

أدى عمل كيربي وباريس وهارينغتون إلى اكتشاف جملة بسيطة وصريحة، Ra، حول الأعداد الطبيعية والتي لا يمكن إثباتها في النظام الشكلي P[9]. من خلال التفكير في المجموعة اللانهائية ω، يمكن أن نرى بسهولة أن هذه الجملة صحيحة. ومع ذاك، لا يمكن إثبات Ra من بديهيات P لنظرية الأعداد. كما لا توجد طريقة واضحة للعثور على مثل هذه الجمل البسيطة والصريحة وغير القابلة للإقرار بواسطة النظريات غير المكتملة بخلاف P.

يمكننا أن ننتقل الآن إلى فرضية أخرى من فرضيات نظرية عدم الاكتمال. في القسم الأخير، عرَّفنا Con(T) بأنها الجملة العددية النظرية:

$$\sim(\exists m)[\mathrm{Prov}_T\,[m,o=1]]$$

تقول النظرية الثانية لعدم الاكتمال:

«إذا حققت النظرية T الشروط الأول والثاني والثالث، إذاً فإنها لا تثبت Con(T)».

يتكون الدليل على نحو أساس من إضفاء الطابع الشكلي على الحجة التي قدَّمناها سابقاً، «إذا كانت النظرية T متسقة، فإن الجملة G_T تكون صحيحة». يمكن بهذه الطريقة أن نظهِر أن هناك دليلاً بواسطة T يثبت أن «Con(T)→G_T». إذا تمّ إثبات Con(T) بواسطة T أيضاً، فيمكننا تطبيق دليل الإثبات والحصول على إثبات لـG_T بواسطة T، وهو أمر مستحيل. لذلك لا يمكن أن نثبت Con(T) بواسطة T من الأساس.

إن حقيقة عدم قدرة النظرية P على إثبات اتساقها Con(T)، لا تجعل

9- Jeff Paris and Leo Harrington, «A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic», in Jon Barwise, ed., *A Handbook of Mathematical Logic* (Amsterdam: North-Holland, 1977), pp. 1133–1142.

معظم علماء الرياضيات في شكٍّ من اتساق النظرية ذاتها. والفكرة هنا ببساطة أنه بالنسبة لأي نظرية متسقة وقوية بما فيه الكفاية، فإن الجملة التي تعبِّر عن اتساقها هي جملة صحيحة لكن لا يمكن للنظرية نفسها الوصول إليها.

نلاحظ أن كلاً من الجمل Con(T) وG_T لهما الشكل $\sim(\exists m)[Prov_T[m,k]]$، حيث k عدد ما. وكما هو الحال مع G_T، يمكن وضع Con(T) في شكل جملة حول عدم وجود حلّ لمعادلة كثيرة الحدود اعتماداً على الأعداد الطبيعية. وسيكون الأمر الأكثر تعقيداً في كثير الحدود هو الأمثال أو المصطلح الثابت t، الذي يرمِّز وصفاً محدوداً للنظرية T. نظراً لأن عملية الترميز أكثر وضوحاً من اللغة العادية، فإن العدد t لن يكون عملياً إلى حدٍّ ما. مع ذلك، يحق لنا أن نقول إن وصف T باللغة العادية يشكِّل تسمية مناسبة لـ t، لأن تقنيات الحاسوب الحالية كافية لبناء آلة تقوم تلقائياً بتحويل وصف مثل الوصف المعطى لـ P في قسم «النظم الشكلية»، إلى الرمز الموافق p. لذا فإن هناك ما يبرّر قولنا إنه إذا فهمنا الوصف المنتهي للنظرية T القوية مثل P، وعرفنا أن T متسقة، فإننا نعرف الحقائق النظرية العددية (أي Con(T) و G_T) التي لا يمكن لـ T إثباتها.

ملاحظة تقنية
حول التكافؤ بين الإنسان والآلة

جادل الفيلسوف جون لوكاس بأنه لا يمكن أن توجد آلة تطابق الحدس البشري الرياضي[10]. يمكن لنا في هذه الملاحظة أن نفترض M^* هي مجموعة الفرضيات المُدرَجة بواسطة النظام الشكلي الآلي M. وعلى المنوال نفسه، نفترض H^* هي مجموعة الجمل التي يمكن للحدس البشري الرياضي أن يؤكّد صحتها. ادعى لوكاس أن $H^*\neq M^*$ أياً يكن النظام الشكلي الآلي M.

يمكن أن نصيغ ادعاءه كما يلي:

1) إذا كانت H^* تساوي أو تحتوي M^*، إذاً يمكن للحدس البشري الرياضي H أن يدرِك أن M تجسِّد نظاماً شكلياً صحيحاً.

2) إذا أدرك H أن M صحيح، سيدرك إذاً أنه متسق، وأن $Con(M)\in H^*$.

تخبرنا نظرية عدم الاكتمال الثانية أن $Con(M)\notin M^*$. لذا يمكننا أن نستنتج أنه إذا كانت $M^*\subseteq H^*$، فإن $H^*\neq M^*$. وبالتأكيد إذا لم تكن H^* تساوي أو تحوي M^* فإن $H^*\neq M^*$. لذا نصل إلى أنه ما من آلة M يمكن أن تساوي الحدس البشري الرياضي H.

أود أن أُعيد صياغة الحدس الصحيح الكامن وراء هذه الحجة

10- Jeff Paris and Leo Harrington, «A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic», in Jon Barwise, ed., A *Handbook of Mathematical Logic* (Amsterdam: North-Holland, 1977), pp. 1133-1142. يمكن إيجاد مقالات بتنسيق جيد حول حجة لوكاس في: DeLong's *Profile of Mathematical Logic*.

الخاطئة. من المتوقع أن يتعامل الحدس البشري الرياضي H مع العديد من الأوليات خارج الرياضيات. تبدو هذه الأوليات كأشياء مثالية إذا صحّ التعبير. سأدَّعي أن H يستخدم على وجه التحديد توكيداً أولياً أحادياً، Tr( )، للأعداد الطبيعية. نقصد بـ Tr(e) أن الآلة M_e مع القائمة e تُدرِج مجموعة الجمل الرياضية الصحيحة في الكون الرياضي الذي يدركه الحدس الرياضي البشري H. (نقصد بذلك آلة إثبات الفرضيات M_T كما في قسم «النظم الشكلية والآلات»، والتي تمّ ترميز قواعد عملها كما في قسم «مكتبة بابل»).

يمكن صياغة المبدأين اللذين نحتاجهما لمناقشة حجة لوكاس باستخدام هذا التوكيد الجديد.

(1) $M_e^* \subseteq H^* \rightarrow Tr(e) \in H^*$؛

(2) $Tr(e) \in H^* \rightarrow Con(e) \in H^*$؛

إن Con(e) هي الجملة العددية النظرية التي تعبِّر عن التوكيد بأن M_e تشكِّل نظرية متسقة.

يبدو المبدأ الثاني منطقياً تماماً، ويمكن أن نعطيه عنواناً: H الأفلاطوني. يعبِّر هذا المبدأ عن اعتقاد الحدس H بأن توكيده Tr يعتمد على كون رياضي موضوعي وموصوف.

إن المبدأ الأول قوي. وأنا مستعد للإقرار بأن جميع الجمل الموجودة في H^* صحيحة بالفعل، وأنه إذا كانت $M^* \subset H^*$ فإن M تضمّ نظريات صحيحة فحسب. لكن في الواقع، لن يوجد Tr(e) في H^* إلا إذا أدرك الحدس H النظرية M_e كوحدة كلية. ولا يحدث ذلك إلا إذا كان H قادراً على تسمية العدد الطبيعي الكبير e. لذا فإن الشكل الصحيح للمبدأ الثاني هو: $M_e \subseteq H^*$ و e عدد قابل للتسمية من قبل الإنسان، إذاً $Tr(e) \in H^*$.

ناقشنا في قسم «مفارقة بيري» وجود عدد طبيعي محدد يُدعى عدد بيري البشري، u_H. وهو العدد الأول الذي لا يمكن للإنسان تسميته، أي إنه خارج إدراك الحدس H. قد يمكن للإنسان أن يسمِّي بعض الأعداد خارج نطاقه، لكن أن يكون العدد أقل من عدد بيري هو تقريب جيد لمفهوم قابلية التسمية.

مع طريقة التفكير هذه، لنُعِد صياغة المبدأ الأول: $(M_e^* \subseteq H^* \,\&\, e<u_H)\rightarrow Tr(e)\in H^*$.

يعبِّر هذا المبدأ، والذي يمكن تسميته «وعي الحدس البشري الرياضي H»، عن اعتقاد H بأنه ليس نظاماً شكلياً فحسب، بل إنه بدلاً من ذلك «مكتشِف رياضي لحقائق رياضية».

بقدر ما تطور الحدس البشري H كنتيجة لتسلسل معقد منتهٍ من الأحداث، فليس من المعقول أن نتوقع تطور آلة تتطابق الحدس الرياضي البشري. وإن المساواة بين الاثنين، $H^*=M_h^*$، تنسجم مع أن يتحقق المبدآن H الأفلاطوني ووعي الحدس البشري الرياضي H ونظرية غودل، بشرط أن يكون العدد h أكبر من u_H. كما يجب أن يستوفي العدد الشرط الأقوى بأن يكون غير قابل للتسمية من قبل الإنسان.

ما أعتقد أنني حقّقته هنا هو إظهار إمكانية صياغة دقيقة لنقاش حجة تنطوي على مفاهيم عصية على الحلّ مثل «الحدس الرياضي البشري» و«الحقيقة» و«الكون الرياضي» و«قابلية التسمية إنسانياً».

ملحق
ملاحظات مقدمة الطبعة الثالثة

في السؤال الأول من الألغاز والمفارقات في نهاية الفصل الأول، طرحت السؤال عن احتمال وجود كواكب مطابقة تماماً لكوكبنا في الكون اللامتناهي. وفي الإجابة على هذا السؤال في الصفحة 79، استبعدتُ هذا الاحتمال.

لكني أشعر الآن أن هذه الإجابة تقلّل من القوة الهائلة للانهاية. إذا كان كوننا لامتناهياً فقد يكون في مكان ما، بعيداً عن الأرض، نسخة لك تقرأ هذه الكلمات بالضبط.

تبين في وقتنا الحاضر أن هذا السؤال أقل افتراضية مما كنت أعتقد، فعلماء الكونيات الآن يعتقدون أن كوننا لانهائي فعلاً، يضم في أرجائه عدداً لانهائياً من النجوم والكواكب، وأن التفرد الأولي «initial singularity»، وهو النقطة التي بدأ عندها الكون الذي نرصده ويُعرف أيضاً بـ«الحالة الأولية»، لم يكن نقطة واحدة، بل فضاءً لانهائياً.

إذا كانت الصورة القديمة لـ«الانفجار العظيم» تتمثل بنقطة بيضاء تظهر في سطح، فإن الصورة الجديدة هي لسطح كلي لانهائي يضيء فجأة في جميع أجزائه. ربما تتخيل صفحة من الضوء تستقر على سطح؛ بالفعل، أحد النماذج الحالية تُظهِر الكون كزوج من الفضاءات المتوازية اللذين يتأرجحان للأمام والخلف، مُحدِثين انفجاراً عظيماً في كل مرة يخترقان بعضهما البعض.

فيما يتعلق بمسألة ما إذا الكون اللانهائي يضمّ عوالم أخرى مثل الأرض، اطلعتُ مؤخراً على بعض الأعداد المثيرة للاهتمام من ماكس تيغمارك في

مقاله «الأكوان المتوازية»[1]. إذا افترضنا أن الانفجار العظيم الذي ملأ الفضاء حدث منذ 14 مليار سنة، فإن الكون اللانهائي المرئي لنا حالياً هو كرة يبلغ قطرها حوالي أوكتيليون[2] (1 أوكتيليون = 10^{27}) متراً. (أذكر هنا أن الاسم القياسي لعدد من النموذج $10^{((k+1).3)}$ يحتوي على الشكل العام: ـ يليون) هذه الكرة التي يبلغ قطرها أوكتيليون متر، والتي تُدعى كرة هابل أو حجم هابل، تحتوي على الأجسام القريبة بما فيه الكفاية ليصل الضوء إلينا منذ لحظة الانفجار العظيم.

لنفترض على نحو غير منطقي أن متوسط درجة حرارة حجم هابل أقل من مئة مليون درجة مئوية (تبلغ درجة حرارة سطح الشمس 5000 درجة مئوية). في هذه الحالة، وفقاً لتيغمارك، يمكن لحجم هابل أن يحتوي على 10^{118} بروتون. وللتعامل مع هذا العدد يمكن لعدد «غوغول» أن يساعدنا؛ ويُكتب عدد غوغول متبوعاً بمئة صفر، فيكون العدد:

$$10^{118} = 10^{(18+100)} = 10^{18} * 10^{100} = 10^{((5+1)*3)} * 10^{100}$$

أي كوينتليون غوغول.

يمكننا الآن أن نتساءل كم من المناطق بحجم هابل المميز يمكن أن توجد. لنتصوَّر حجم هابل كشبكة من القضبان المتعامدة تضمّ كوينتليون غوغول من الفتحات فيما بينها. يمكن للمرء أن يحدّد كوناً اعتباطياً عشوائياً مرئياً عن طريق اختيار ما يضعه في كل فتحة- يمكن أن يترك فتحة فارغة هنا ويضع بروتوناً أو نيوتروناً في فتحة هناك، أو ربما يلصق إلكتروناً أو نوعاً آخر من الجُسيمات في فتحة أخرى. ولإبقاء المسألة بسيطة إلى حدٍّ معقول، لنفترض أن لدينا عشر طرق لملء هذه الفتحات البالغ عددها كوينتليون

1- مجلة ساينتفيك أمريكان، أيار 2003، ص 41- 51. (المترجمة).

2- يعتمد المؤلّف لأسماء قوى العدد 10 الجدول القصير (الولايات المتحدة الأمريكية والإنكليزية المعاصرة)، أمّا في الجدول الطويل (الإنكليزية التقليدية القديمة) فإن 1 أوكتيليون = 10^{48}. ولتوضيح مقدار هذا العدد، نذكر أنه إذا كانت الأرض مجوَّفة، فإنها تحتاج 1 أوكتيليون (10^{27}) حبَّة بازلاء لتمتلئ تماماً. انظر:

The Book of Numbers, by Conway, J. H. and Guy, R. K. New York: Springer-Verlag, 1996. (المُترجِمة).

غوغول والتي حجم كل منها بحجم بروتون. في هذه الحالة، يتألف عدد الطرق الممكنة لملء حجم هابل بالمادة من: الاختيار بين عشرة خيارات لكوينتليون غوغول مرة على التوالي، وهو عبارة عن 10 مرفوعة للقوة كوينتليون غوغول. في وصف هذا العدد، من المفيد الاستعانة بالأخ الأكبر للعدد غوغول «غوغول بلكس»، وهو عبارة عن 10 مرفوعة للقوة غوغول ($10^{(\text{googol})}$). هذا العدد يتألف من رقم 1 متبوعاً بغوغول صفراً.

نظراً لصعوبة كتابة الأسس المزدوجة، سأستخدم الرمز ^ للدلالة على المستوى الثاني من الأس.

$$10^{(\text{quintillion googol})} = 10^{(10\text{^}118)} = 10^{((10\text{^}100)*(10\text{^}18))} = (10^{(10\text{^}100)})^{(10\text{^}18)}$$

هذا هو العدد غوغول بلكس مرفوعاً للقوة كوينتليون (غوغول بلكس$^{\text{كوينتليون}}$).

إذاً نحن نعلم الآن أن هناك غوغول بلكس$^{\text{كوينتليون}}$ احتمالاً لكيف يمكن لكوننا المرئي أن يبدو. أجل، إنه عدد كبير، لكن إن كان كوننا لانهائياً فعلاً، سيكون هناك عدد لانهائي من كرات هابل الممكنة الوجود بالإضافة إلى كرتنا نحن، ومن المحتمل أن تكون إحداها مطابقة تماماً لكرتنا.

كم يمكن أن تبعد عنا النسخة المطابقة لكرتنا؟ يمكن أن نفترض كفكرة أولى أن ننطلق بخط مستقيم ونجتاز بسرعة أول غوغول بلكس$^{\text{كوينتليون}}$ من أحجام هابل المختلفة عنا. وعلى سبيل التسلية فقط، لنطلق على هذه المسافة اسماً ما، وليكن: «خطووووة» واحدة. بالنظر إلى أن قطر كرة هابل يبلغ أوكتيليون متر، فإن «الخطووووة» تبلغ أوكتيليون غوغول بلكس$^{\text{كوينتليون}}$ متر. هل السفر إلى هذه المسافة يضمن لنا تحقيق ما نريده؟ ليس تماماً.

إن بعض الحساب للاحتمالات يشير إلى أن السفر لـ «خطووووة» واحدة يعطي احتمالاً بنسبة 63% لإيجاد حجم هابل مطابق تماماً للحجم الذي انطلقت منه (الاحتمال الدقيق قريب من 1 – 1\e، حيث e هي الجذر الطبيعي للوغاريتم.) لكن إن سافرنا أكثر من «خطووووة»، فالاحتمالات تتزايد، وبعد عشر «خطووووات» يصل احتمال أن نجد كوناً مرئياً مطابقاً تماماً لكوننا إلى 99.99%.

بعد كل ذلك، ليس هناك من حتمية لأن يجد مسافر ذو قوة خارقة للسفر عبر الفضاء كرة هابل مطابقة تماماً للكرة التي نوجد فيها الآن. إذا وضعنا في الاعتبار مجموعة لانهائية من الأعداد الزوجية فيها رقم فردي *واحد*، هو الرقم 3، وبدأ أحدهم بالرقم 3 وبحث عن رقم فردي آخر سيخيب أمله:

{2، 3، 4، 6، 8، 10، 12، ... 2n، ...}

لكن عملياً وواقعياً، ما من سبب يدعونا لافتراض أن كرة هابل التي نوجد فيها فريدة ومميزة. لذا إن كان الكون لانهائياً فعلاً، فهناك ناس آخرون مطابقون لنا تماماً في مكان ما هناك. إنها فكرة غريبة حقاً، لكنها تمنحنا حرية على نحوٍ ما، فإذا أخطأتُ في كتابة هذه المقدمة، سيكون هناك رودي آخر يكتبها بطريقة أفضل، فلِمَ القلق إذاً؟

***

يجب إجراء تصحيح في القسم «ملاحظة تقنية حول التكافؤ بين الإنسان والآلة» من الصفحة 405 إلى 407. (اكتشفتُ المشكلة في محادثاتي مع الفلاسفة ليون هورستن ومارك فان أتين في جامعة لوفان عام 2002. كنتُ هناك ضيفاً في VLAC، أو الأكاديمية الملكية الفلمنكية للعلوم والفنون، في بروكسل).

أتمسَّك باحتمال أنه من الممكن من حيث المبدأ إيجاد آلات حسابية تفكر مثل البشر. كانت الفكرة في ملاحظتي التقنية هي الدفاع عن اعتقادي ضد حجة «جاي أنطوني لوكاس» التقليدية بأن نظرية «غودل» الثانية في عدم الاكتمال تستبعد التكافؤ بين الإنسان والآلة، وهي حجة أحياها ونشرها المؤلف الفيزيائي «روجر بنروز» في التسعينيات من القرن الماضي.

للأسف، تحتوي ملاحظتي على خطأ فيها، حيث زعمتُ في مقدمة الطبعة الثانية من هذا الكتاب أن هذه الملاحظة «حاسمة». حسناً، أنا رودي آخر الآن، وسأصلح الأمر.

لنفترض أن h عدد صحيح يرمّز برنامجاً على الآلة M_h، والتي تشبه مخرجات عملياتها ما يمكن للإنسان أن يصل إليه. يقول كل من لوكاس وبنروز: أولاً، بعد استخدام الآلة M_h فترة من الوقت، سيشعر أي شخص

عاقل بصحة الادعـاء $Tr(h)$، الذي يقول «إذا صُمِّمت الآلة M_h على الخوارزمية التي تمّ ترميزها بـ h، فإن مخرجات الآلة لن تكون سوى جمل صحيحة رياضياً». ثانياً، بعد تأكيد الادعاء $Tr(h)$، سيشعر أي شخص عاقل بصحة الادعاء $Con(h)$ أيضاً، والذي يقول «إذا صُمِّمت الآلة M_h على الخوارزمية التي تمّ ترميزها بـ h، فإن الآلة لن تخرج أي تناقضات رياضية». لكن نظرية عدم الاكتمال الثانية لـغودل تُظهِر أن الآلة لا يمكنها إثبات صحة الجملة $Con(h)$ كما رأينا في التدريب الثاني، لذلك فإن أي شخص عاقل يستخدم الآلة M_h (الشبيهة بالإنسان) سيعرف بعد فترة من الوقت شيئاً لا يمكن للآلة ذاتها إثباته.

في ملاحظتي، جادلتُ بأنه إذا كانت الآلة M_h تشبه في مخرجاتها ما يمكن للإنسان أن يصل إليه، فيجب حتماً أن يكون العدد h صعباً على الإنسان لوصفه. واقترحتُ أن العدد h سيكون في الواقع غير قابل للتسمية من قِبَل الإنسان، بمعنى ألا يمكن لأي كان تقديم وصف أو تمثيل دقيق له خلال حياته.

كان السبب في ملاحظتي أنه إذا كان h غير مُسمًّى من الإنسان، فمن المستحيل أن يصيغ إنسان ما بدقة الادعاءات $Tr(h)$ أو $Con(h)$، ناهيك عن تأكيدها. لذا فإن حجة لوكاس تفشل.

ولكن الآن، بعد أن أمضيتُ الثمانية عشر عاماً الأخيرة في تدريس علوم الحاسوب والبحث فيها، أدركُ أنه يمكننا، من حيث المبدأ، تمثيل «طريقة ذهنية» بسيطة إلى حدٍّ ما يمكن استخدامها لتطوير برنامج حاسوب يشبه الإنسان، بالرغم من أن محاكاة التطور على الآلات الحاسوبية قد تستغرق سنوات عديدة. النقطة الأساسية هي أن الطريقة الذهنية نفسها قد يُعبَّر عنها بعدد قابل للتسمية.

تكمن الفكرة الرئيسية وراء الطريقة الذهنية هي البدء بعدد كبير من عيِّنات البرامج، وقياس مدى ملاءمتها مراراً وتكراراً لفهم مجموعة ثابتة من الكتب والأفلام وغيرها، وفي كل مرة تُستبدل البرامج الأقل ملاءمة بطفرات أو مجموعات من البرامج الأكثر ملاءمة. إذا تمّ تصميم هذا التطور المُحاكي

على نحو صحيح، فإن لديه مع مرور الوقت فرصة للتطور الذاتي والوصول إلى آلات تشبه الإنسان. لِمَ نستبعد ذلك؟! نحن- الجنس الإنساني- أنفسنا تطوّرنا من بداية متواضعة للغاية.

إن الطريقة الذهنية حتمية وقابلة للتسمية شريطة أنه عندما نقوم بطفرات في البرامج أو نختار أزواجاً من البرامج للجمع بينها، أن نستخدم ببساطة أداة تعريف عشوائية زائفة لمولّد البتات العشوائية (وهو نظام يُنتج بتات غير متوقَّعة تماماً) اللازمة لتنظيم عملية التطور المُحاكى. يمكن أن نستخدم، على سبيل المثال، الدالة rand () من لغة البرمجة C التقليدية التي تُعيد القيمة الحالية للمتغير *random_integer* وفي الوقت ذاته تقوم بتحديث هذه القيمة إلى

214,013 ·random_integer+ 2,531,011

كما يمكن استخدام أوتوماتيكية خلوية أحادية البُعد مثل القاعدة 30 التي يشرحها ستيفن ولفران في كتابه المميز *نوع جديد من العلوم*[3].

يمكن من خلال الطريقة الذهنية تحديد آلة معقدة M وليكن اسمها «ابدأ ببذرة عشوائية ولتكُن العدد 1946، اصنع مجموعة تعداد أولي لمليون برنامج عشوائي، وطوِّر التعداد عبر مليار جيل باستخدام الطفرات والتلاقح بين الخوارزميات التطورية[4]، وقيِّم الملاءمة وفقاً للاختبارات المحددة التالية: يجب على الآلة أن تجيب عن الأسئلة عن مجموعة من الكتب والأفلام، وأن يكون أداؤها أفضل من البرامج الأخرى في مجوعة من الألعاب، وأن تسجِّل نقاطاً أعلى في برنامج تصنيف الطفرات في كل منها، وغير ذلك». ويمكن تحويل هذا الاسم بشفافية إلى الترميز القابل للتسمية h.

3- *A New Kind of Science* by Stephen Wolfram (Wolfram Media, 2002).

4- الخوارزميات الجينية أو الخوارزميات التطورية، هي تقنية هامة من تقنيات البحث عن الخيار الأمثل من مجموعة حلول متوفرة لتصميم معين، وهي إحدى طرق الخوارزميات التي تعتمد على تقليد عمل الطبيعة من منظور دارويني. وتستخدم تكنولوجيا مستوحاة من البيولوجيا التطورية مثل التوريث والطفرات والاصطفاء والتهجين. انظر:
https: / /www.britannica.com /technology /genetic-algorithm.
(المُترجِمة).

بعبارة أخرى، كنتُ مخطئاً بقولي إنه إذا تصرَّفت الآلة M_h مثل الإنسان فيجب أن يكون h غير قابل للتسمية. لكن ذلك لا يعني أن سلوك الآلة M_h النهائية بسيط؛ فهذه الآلة ستكون نتاج مليار جيل من التطور المُحاكى. على سبيل المثال، قد يأخذ البرنامج الناتج عن عملية التطور شكل شبكة عصبية تضم مئة تريليون من الأعداد الهائلة الحقيقة المُعدَّلة بدقة، وهي كمية من البيانات التي لا يمكن لأي إنسان أن يأمل قراءتها بالكامل، أمَّا هذه الآلة فلديها تعريف لها ببساطة.

والآن ماذا عن لوكاس وبنروز؟ صاغ الفيلسوف هيلاري بوتنام حجة ما زالت حتى الآن أفضل حجة مضادة في كتابه «العقول والآلات»[5] عام 1960. (ردّ لوكاس على هذه الحجة في مقاله العبقري، وإن كان غير مقنع، «ورقة إلى ميتمر تورينج في بريتون 6 نيسان 1990.»[6]).

وجهة نظر بوتنام بسيطة. فحتى إذا سلكت الآلة M_h سلوكاً عقلانياً لفترة من الوقت، فلا يوجد أي أساس ثابت لتأكيد أن الآلة ستنتج جملاً رياضية صحيحة دائماً أو أنها لن تقع في تناقض أبداً. إذا كان لديك فهم كامل لكيفية عمل الآلة، عندها ربما يمكنك إثبات أن الآلة متسقة. ولكن، كما ذكرتُ سابقاً، في حالة الطريقة الذهنية h، تعمل الآلة على نحو معقد وغير مفهوم، ولن نكون في وضع يسمح لنا الادعاء بمعرفة صحة الجملة التي تثبت أن الآلة متسقة. في الواقع، هذا هو فحوى نظرية غودل الثانية لعدم الاكتمال؛ فبدلاً من استبعاد التكافؤ بين الإنسان والآلة، تضع النظرية قيوداً على ما يمكننا نحن أنفسنا معرفته عن تكافئنا مع الآلات.

إن هذا ليس بأمر مفاجئ. قد تتشارك مكتباً أو منزلاً مع شخص ما، وليكن السيد (P)، لمدة خمسة عشر عاماً، وتثق تمام الثقة بأن السيد (P) إنسان مستقر نفسياً، ثم في يوم ما يبدأ السيد (P) بقول وفعل أشياء مجنونة تماماً. أنت تخيلتَ أن الجملة Con(P) صحيحة (أي لا تصدر عنه أي تناقضات)،

5- *Minds and Machines* by Hilary Putnam.

6- الورقة متاحة على الانترنت: http: / /users.ox.ac.uk /~jrlucas /Godel / brighton.html. (المترجمة).

ولكن ذلك لم يكن صحيحاً. كان السبب القوي الوحيد لتأكيد صحة Con(P) هو دليل منهجي، لكن نظراً لأنك أنت والكائن P من المستوى نفسه، بقي هذا النوع من الإثبات خارج نطاق قدرتك دائماً. وطوال الوقت الذي لا تكون فيه Con(P) مثبَتة الصحة، فإنها تحمل ضمنها احتمال أن تكون خاطئة. وسواء أعجبنا ذلك أم لا، فهذا هو الأمر عندما نتعامل مع كائنات ذكية أخرى.

فيما يتعلق بموضوع الإنسان والوعي الآلي، أود أن أشير إلى ملاحظة إضافية حول الإحساس الأساس «أنا أكون» الذي أناقشه في الفصل الرابع «وعي الروبوت». على نحو مخادع إلى حدٍّ ما، قدَّمتُ إحساس «أنا أكون» على أنه مُعطى ينتج من الوجود البسيط. ولكن من الأكثر واقعية أن الوعي الأساس للإنسان يعتمد على أنواع معينة من الأنشطة التي تحدث في الدماغ، وبالمناسبة هي عمليات يمكن تصميمها بواسطة برنامج أو آلة. يظهر نموذج مفصَّل إلى حدٍّ ما للوعي الأساسي في كتاب أنطونيو داماسيو «الشعور بما يحدث»[7]. يعرض داماسيو أن الوعي ينشأ وفق السياق التالي:

- *الاستغراق*: أنت نشيط في هذا العالم.
- *رؤية الأشياء*: أنت تميِّز الأشياء المنفصلة في العالم، بما فيها جسدك.
- *شريط من الصور في الدماغ*: لديك نموذج عقلي جارٍ باستمرار للعالم. يتضمن هذا الشريط صوراً لأشياء العالم وصورة لجسدك.
- *الذات الأولية*: تختلف صورة جسدك عن صورة شيء ما في أن صورتك لجسدك تتضمن صوراً لأحاسيسك ومحتوياتك العقلية الحالية. هذه الصورة الغنية هي الذات الأولية.
- *المشاعر*: أنت تقوم تلقائياً وباستمرار بتحسين شريط الصور في الدماغ عن طريق إضافة تمثيلات لتفاعلات الذات الأولية مع الأشياء. هذا المستوى الثاني من التمثيلات هي ما نسميه «المشاعر».
- *الوعي الجوهري*: إن فعل تكوين المشاعر باستمرار هو جزء مما نعنيه بالوعي. في أي لحظة، يعتمد الوعي الجوهري على مشاعرك

7- *The Feeling of What Happens* by Antonio Damasio, (Harcourt, 1999). (المترجمة).

اتجاه مجموعة صغيرة من الصور. يسلِّط الوعي الجوهري الضوء على تلك الصور المعينة، والتي تمثِّل تركيز انتباهك الحالي.

يجد القارئ المزيد حول ذكاء الروبوت والطريقة الذهنية والوعي الجوهري عند داماسيو في كتابي القادم «صندوق الحياة؛ الصدفة والروح»[8] الذي ستنشره ثاندرز ماوث برس في عام 2005.

***

قدَّم الباحثون في نظرية المجموعة العديد من الأعمال خلال الخمس والعشرين سنة الماضية منذ كتبتُ «اللانهاية والعقل». لفت انتباهي مؤخراً اثنتان من المقالات التفسيرية لعالِم الرياضيات ويليام هيو وودين، وهما «فرضية الاستمرارية، الجزء الأول» و«فرضية الاستمرارية، الجزء الثاني»[9]. تفاجأت وسُعدت في الوقت ذاته بوجود بعض المنظِّرين في نظرية المجموعة ممن يعتقدون أن مسألة الاستمرارية قابلة للحلّ، وأن الإجابة تتطابق على الأرجح مع تخمين كورت غودل بأن حجم الاستمرارية c هو العدد الأصلي فوق المنتهي $\aleph_2$. فبعد السنوات الطويلة التي قضيتها بين أجهزة الحاسوب التي يمثِّل العدد 4 مليار أكبر عددٍ صحيح ممكن لها، أصبحت أخشى أن تساؤل كانتور حول اللانهايات الأعلى قد يكون بلا معنى.

قبل بضعة أسابيع، قمت بزيارة هيو وودين في مكتبه في جامعة كاليفورنيا، بيركلي. وتناقشنا حول أعماله الأخيرة، وبذل قصارى جهده لشرحها لي.

يمكن صياغة تحليل وودين حسب المجموعات ذات الشكل H(k)، مما يعني أن العدد الأصلي للمجموعة التي تضمّ كل المجموعات الوراثية هو أقل من k. وتكون المجموعة x في المجموعة H(k) إذا كان حجمها

8- *The Lifebox, the Seashell and the Soul,* by Rudy Rucker, Thunder's Mouth Press.

9- The Continuum Hypothesis, «Part I» & «The Continuum Hypothesis, «Part II» (*Notices of the American Mathematical Society,* 48(6): 567-576 and 48(7):681-690.

أقل من k، وكانت جميع عناصر x ضمن $H(k)$ أيضاً. والآن، إذا اعتبرنا أن $\aleph_0$ هو العدد الترتيبي اللانهائي الأول، فإن $H(\aleph_0)$ هي المجموعة التي تضمّ كل المجموعات الوراثية المنتهية. وإذا لم توجد مجموعات لانهائية على الإطلاق، سيكون عندها كون نظرية المجموعة هو $H(\aleph_0)$.

يزداد التحليل تشويقاً عندما نفكر في $H(\aleph_1)$، حيث $\aleph_1$ هو أول عدد ترتيبي غير قابل للعدّ. تحتوي المجموعة $H(\aleph_1)$ على مجموعات وراثية قابلة للعد، أي إن حجمها منتهٍ أو قابل للعد، وعدد عناصرها منتهٍ أو قابل للعد، وعدد عناصر جميع المجموعات التي تحويها منتهٍ أو قابل للعد أيضاً. إذا لم توجد مجموعات غير قابلة للعد، سيكون عندها كون نظرية المجموعة هو المجموعة $H(\aleph_1)$. ويمكننا اعتبار $H(\aleph_1)$ كون نظرية الأعداد من الدرجة الثانية، لأنه يضمّ الأعداد الصحيحة ومجموعات الأعداد الصحيحة، فأي مجموعة فيه قابلة للترميز بسهولة على أنها مجموعة من الأعداد الصحيحة.

يتعلق الجزء الأول من فكرة وودين ببديهية في نظرية المجموعة تُعرف بـ «حتمية الإسقاط». وفكرة هذه البديهية موجودة منذ عقود، وهي أن هناك مجموعات كافية من الأعداد الطبيعية لتستوفي كل مجموعات الشروط التي يمكن صياغتها في $H(\aleph_1)$. إن القول بوجود العديد من المجموعات المختلفة من الأعداد يعني أن كون نظرية المجموعة واسع وغني بالاحتمالات.

كان التطور الجديد هو أن العمل مع بديهيات الأصول الكبيرة أقنع العديد من منظِّري المجموعة أن «حتمية الإسقاط» صحيحة. وبتعبير آخر، تحققت آمال كورت غودل، وأدّى التفكير برتب أعلى من اللانهاية إلى رؤى جديدة حول بنية المستويات الأصغر من المجموعات مثل $H(\aleph_1)$. الأمر الجيد في ذلك أن إضافة «حتمية الإسقاط» إلى البديهيات المعتادة لنظرية المجموعة تحلّ العديد من الأسئلة حول المجموعة $H(\aleph_1)$ للمجموعات القابلة للعدّ وراثياً، ولا يمكن استخدام تقنيات كوهين التقليدية لإثبات أن الجمل في هذه المجموعة مستقلة عن البديهية. ووفقاً لمصطلحات وودين، يعني ذلك أن نظرية «بديهية حتمية الإسقاط + بديهيات نظرية المجموعة» هي نظرية مطلقة عموماً.

يتعلق الجزء الثاني من فكرة وودين بكيفية تحول منظِّري المجموعة إلى الكون الأكبر التالي منطقياً، وهو $H(\aleph_2)$. يمثِّل هذا الكون مجموعة كل المجموعات ذات العدد الأصلي الأقل من $\aleph_2$. ونظراً لأن الحجم «الأقل» من $\aleph_2$ يعني «أقل من أو يساوي $\aleph_1$»، يمكننا القول إن $H(\aleph_2)$ هي المجموعة التي تضمّ كل المجموعات ذات العدد الأصلي الأقل من أو يساوي $\aleph_1$، والتي عناصرها من المجموعات ذات عدد أصلي أقل من أو يساوي $\aleph_1$، وهكذا.

كان من المفيد سابقاً، وبدلاً من النظر إلى مستويات $H(\ )$، النظر إلى الأكوان الجزئية V_α، والتي أصفها في الصفحة 281. وبالفعل، إن $H(k)$ مطابق لـ $H(\aleph_0)$، و$V_{(\omega+1)}$ مطابق لـ $H(\aleph_1)$. لكن مدى اتساع كون المجموعات يجعل من الانتقال إلى $V_{(\omega+2)}$ يتحول إلى قفزة كبيرة تتجاوز $H(\aleph_2)$.

تُعتبر المجموعة $H(\aleph_2)$ ذات أهمية حاسمة لأن فرضية الاستمرارية الخاصة بكانتور تُصاغ كجملة في المجموعة $H(\aleph_2)$. إذا وُجدت طريقة لسرد جميع الأعداد الحقيقية على نحو شامل كمتتالية، سنجد هذه المتتالية في $H(\aleph_2)$.

يتمثل مسعى وودين الحالي في تجاوز نجاح «حتمية الإسقاط»، والوصول إلى فهم أعمق لهذا الكون الصغير من المجموعات، $H(\aleph_2)$، مع التركيز على حلّ مسألة استمرارية كانتور. وهو الآن يبذل قصارى جهده، ويمزج بين التحليل القوي لكون نظرية المجموعة مع التحليل التقليدي والمفصَّل لمجموعات الأعداد الطبيعية، للوصول إلى الاستنتاج: $\aleph_2=c$.

يبدو هذا الاستنتاج ثانوياً أمام الأهداف الأكبر لوودين. فهو يرى مع زملائه أن نظرية المجموعة تقف عند مفترق طرق فيما يتعلق بمبدأ يسمِّيه «حدس Ω»، والذي بالكاد أستطيع فهمه. هذه هي رياضيات القرن الواحد والعشرين، وهي تتجاوز درجتي الدكتوراه في القرن العشرين بعيداً. لكن الأمر المهم هنا هو أن دراسة اللانهاية حية وقوية، ومزوَّدة بتقنيات جديدة تضيف إليها المزيد من الغرابة والروعة أكثر من أي وقت مضى.

Rudy Rucker

لوس غاتوس، كاليفورنيا

22 حزيران 2004

المراجع

- Abian, Alexander: The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic. Philadelphia: Saunders 1965.
- Alighieri, Dante: The Divine Comedy, Paradisio, Canto 33. Translated by Charles S. Singleton, Princeton N.J.: Princeton University Press 1975.
- Anderson, Alan R. (ed.): Minds and Machines. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice–Hall 1964.
- Anderson, Alan Ross: St. Paul's Epistle to Titus. In: The Paradox of the Liar, ed. R. L. Martin, pp. 1–11. New Haven: Yale University Press 1970.
- Aquinas, Saint Thomas: Summa Theologiae. London: Blackfriars 1944.
- Aristotle: Metaphysics. In: The Basic Works of Aristotle, ed. R. McKeon. New York: Random House 1941.
- Aristotle: Physics. Translated by Richard Hope. Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press 1961.
- Augustine, Saint: City of God. New York: E. P. Dutton 1947.
- Bachmann, Heinz: Transfinite Zahlen. Heidelberg: Springer–Verlag 1967.
- Barth, John: Frame–Tale. In: Lost in the Funhouse. New York: Grosset and Dunlap 1969.
- Bartley, Willaim (ed.): Lewis Carroll's Symbolic Logic. New York: Clarkson Potter 1977.
- Bell, Eric Temple: Men of Mathematics. New York: Simon & Schuster 1937.

- Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.): Philosophy of Mathematics. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice–Hall 1964.
- Benardete, José: Infinity. Oxford: Clarendon Press 1964.
- Benioff, Paul A.: On the Relationship between Mathematical Logic and Quantum Mechanics. Journal of Symbolic Logic. 38, p. 547.
- Bennett, Charles: Mathematical Games. Scientific American. 20–34 (November, 1979).
- Berkeley, George: Siris: A Chain of Philosophical Reflections and Inquiries Concerning the Virtues of Tar–Water, and Divers Other Subjects Connected Together and Arising One from Another. In: The Works of George Berkeley, Vol. III, ed. A. C. Fraser. Oxford: Clarendon Press 1901.
- Blood, Benjamin Paul: The Anaesthetic Revelation and the Gist of Philosophy. Amsterdam, N. Y.: Privately printed 1874.
- Blood, Paul: Pluriverse. Boston, Mass.: Marshall Jones 1920.
- Bohr, Niels: Atomic Theory and the Description of Nature. Cambridge, England: Cambridge University Press 1934.
- Bolzano, Bertrand: Paradoxes of the Infinite. London: Routledge and Kegan Paul 1950.
- Borges, Jorge Luis: Labyrinths. New York: New Directions 1962.
- Borges, Jorge Luis: The Book of Sand. New York: E. P. Dutton 1977.
- Bradley, Francis Herbert: Appearance and Reality. New York: Macmillan 1899.
- Bridges, Hal: Ameican Mysticism: From William James to Zen. Lakemont, Ga.: CSA Press 1977.
- Brouwer, L. E. J.: Collected Works. Amsterdam: North–Holland 1975.
- Bruno, Giordano: On the Infinite Universe and Worlds. Translated by Dorothy Singer, New York: Greenwood Press 1968.
- Bulari–Forti, Cesare: A Question of Transfinite Numbers. In: From Frege to Gödel, ed. Jean van Heijenoort, pp. 104–112. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1967.

- Callahan, J. J.: The Curvature of Space in a Finite Universe. Scientific American. (August, 1976).
- Cantor, Georg: Gesammelte Abhandlungen, eds. A. Fraenkel and E. Zermelo. Berlin: Springer–Verlag 1932.
- Cantor, George: Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, ed. P. Jourdain. New York: Dover 1955.
- Cantor, Georg: Letter to Dedekind. In: From Frege to Gödel, ed. J. van Heijenoort, pp. 113–117. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1967.
- Cantor, George and Dedekind, Richard: Briefwechsel Cantor–Dedekind. Noether, E. and Cavailles, J. (eds): Paris: Hermann 1937.
- Carroll, Lewis: Through the Looking Glass. New York: Random House 1946.
- Carroll, Lewis: What the Tortoise Said to Archilles. In: Lewis Carroll's Symbolic Logic, ed. W. Bartley, pp. 431–434. New York: Clarkson Potter 1977.
- Chaitin, Gregory: Randomness and Mathematical Proof. Scientific American. 47–52 (May, 1975).
- Cohen, Paul J.: Set Theory and the Continuum Hypothesis. New York: Benjamin 1966.
- Cohen, Paul J.: Comments on the Foundations of Set Theory. In: Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XIII, Part 1, ed. D. S. Scott, pp. 9–15. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1971.
- Conway, J. H.: On Numbers and Games. New York: Academic Press 1976.
- Couturat, Louis: De l'Infini Mathématique. Paris: Baillière & Co. 1896.
- Dauben, Joseph: C. S. Peirce's Philosophy of Infinite Sets. Mathematics Magazine. 50, 123–135 (May 1977).
- Dauben, Joseph W.: Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1979.
- Daumal, Rene: Mount Analogue. San Francisco: City Lights Books 1959.

- Davies, Paul: Other Worlds. New York: Simon & Schuster 1980.
- Davis, Martin, Matijacevic, Yu. and Robinson, Julia: Hilbert's Tenth Problem. Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII, ed. F. Browder, pp. 223–378. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1976.
- Davis, Philip J.: The Lore of Large Numbers. New York: Random House 1961.
- Dedekind, Richard: Essays on the Theory of Numbers. New York: Dover Publications 1963.
- DeLong, Howard: A Profile of Mathematical Logic. Reading, Mass.: Addison–Wesley 1971.
- d'Espagnat, Bernard: The Quantum Theory and Reality. Scientific American. 158–181 (November, 1979).
- DeWitt, Brian S. and Graham, Neill (eds.): The Many–Worlds Interpretation of Quantum Mechanics. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1973.
- Drake, Frank: Set Theory: An Introduction to Large Cardinals. Amsterdam: North–Holland 1974.
- Dummett, Michael: Elements of Intuitionism. Oxford: Clarendon Press 1977.
- Eddington, Arthur S.: Fundamental Theory. Cambridge, England: Cambridge University Press 1946.
- Edwards, Paul: Why? In: The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 8, ed. P. Edwards, pp. 296–302. New York: Macmillan 1967.
- Ellentuck, Erik: Gödel's Square Axioms for the Continuum. Mathematische Annalen. 216, 29–33 (1975)
- Eves, Howard: An Introduction to the History of Mathematics. New York: Holt, Rinehart and Winston 1964.
- Fadiman, Clifton (ed.): Fantasia Mathematica. New York: Simon & Schuster 1958.
- Freudenthal, Hans: LINCOS: Design of a Language for Cosmic Intercourse. Amsterdam: North–Holland 1960.
- Galilei, Galileo: Two New Sciences. Translated by Henry Crew and Alfonso De Salvio. New York: Macmillan 1914.

- Gardner, Martin (ed.): Mathematical Puzzles of Sam Loyd, New York: Dover 1959.
- Gardner, Martin: Mathematical Carnival. New York Knopf 1975.
- Gardner, Martin: Mathematical Magic Show. New York: Vintage Books 1978.
- Gödel, Kurt: The Consistency of the Continuum Hypothesis. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1940.
- Gödel, Kurt: An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravitation. Reviews of Modern Physics. 21, 447–450 (1949).
- Gödel, Kurt: Über eine Bisher Noch Nicht Benutzte Erweiterung des Finiten Standpunktes. Dialectica. 12, 280–287 (1958).
- Gödel, Kurt: A Remark on the Relationship Between Relativity Theory and Idealistic Philosophy. In: Albert Einstein: Philosopher Scientist, Vol. II., ed. Paul Schilpp, pp. 557–562. New York: Harper & Row 1959.
- Gödel, Kurt: On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems. In: The Undecidable, ed. M. Davis, pp. 5–38. Howlett, N. Y.: Raven Press 1965.
- Goodman, Alvin I.: A Theory of Human Action. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice–Hall 1970.
- Gutberlet, Constantin: Das Unendliche, Metaphysisch und Mathematisch Betrachtet. Mainz: G. Faber 1878.
- Hall, Roland: Monism and Pluralism. In: The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5, ed. P. Edwards, pp. 363–365. New York: Macmillan 1967.
- Hardy, G. H.: Orders of Infinity, the 'Infinitärcalcul' of Paul DuBois–Reymond. Cambridge, England: Cambridge University Press 1910.
- Hardy, G. H.: Divergent Series. Oxford: Clarendon Press 1949.
- Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R.: The Large Scale Structure of Space–Time. Cambridge, England: Cambridge University Press 1973.
- Heath, P. L.: Nothing. In: The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5. ed. P. Edwards, pp. 524–525. New York: Macmillan 1967.

- Heath, Thomas L.: A History of Greek Mathematics. Oxford: Clarendon Press 1921.
- Heath, Thomas (ed.): The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 1. New York: Dover Publications 1956.
- Henle, James and Kleinberg, Eugene: Infinitesimal Calculus. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press 1978.
- Hilbert, David: The Foundations of Geometry. Chicago: Open Court 1902.
- Hilbert, David and Cohn–Vossen, S.: Geometry and the Imagination. New York: Chelsea 1952.
- Hofstadter, Douglas: Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books 1979.
- Hofstadter, Douglas: Metamagical Themas. Scientific American. (May, 1981) Hofstadter, Douglas R.: Metamagical Themas. Scientific American. 18–30 (July, 1981).
- Hofstadter, Douglas and Dennett, Daniel: The Mind's I. New York: Basic Books 1981.
- Hume, David: A Treatise of Human Nature, ed. L. A. Selby–Bigge. Oxford: Clarendon Press 1896.
- James, William: A Pluralistic Universe. New York: Longmans, Green & Co., 1909.
- James, William: The Varieties of Religious Experience. New York: Macmillan 1961.
- Jung, C. G.: Forward. in: The I Ching. Translated by Richard Wilhelm and Cary Baynes, pp. xxi–xxxix. Princeton, N.J.: Princeton University Press 1967.
- Jung, C. G.: Synchronicity. Princeton, N.J.: Princeton University Press 1973.
- Kafka, Franz: The Castle. Translated by Willa and Edwin Muir. New York: Knopf 1976.
- Kafka, Franz: The Diaries of Franz Kafka, ed. M. Brod. New York: Schocken Books 1949.
- Kant, Immanuel: The Critique of Pure Reason. Translated by Norman Kemp Smith. New York: St. Martin's Press 1964.
- Kaufmann, W.: Cosmic Frontiers of General Relativity. Boston: Little, Brown 1977.

- Keisler, H. Jerome: Elementary Calculus. Boston: Prindle, Weber & Schmidt 1976.
- Kline, Morris: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press 1972.
- Kochen, Simon and Wang, Hao: In Memoriam Kurt Gödel. The Mathematical Intelligencer. 182–185 (July, 1978).
- Kreisel, Georg: Kurt Gödel, 1906–1978. To be published by the Royal Society of London.
- Kubose, Gyomay: Zen Koans. Chicago, Ill.: Henry Regnery 1973.
- Kuratowski K. and Mostowski, A.: Set Theory. Amsterdam: North–Holland 1968.
- Leibniz, Gottfried: The Monadology and Other Philosophical Writings. Translated by Robert Latta. London: Oxford University Press 1965.
- Lovejoy, Arthur: The Great Chain of Being. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1953.
- Lucas, J. R.: The Freedom of the Will. Oxford: Clarendon Press 1970.
- Lucretius: On the Nature of the Universe. Translated by Ronald E. Latham. Harmondsworth, England: Penguin Books 1951.
- Mandelbrot, Benoit: Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco: W. H. Freeman 1978.
- Martin, David Anthony: Hilbert's First Problem: The Continuum Hypothesis. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII, ed. F. Browder, pp. 81–92. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1976.
- Melville, Herman: Moby Dick, Chap. 119. New York: New American Library 1961.
- Meschkowski, Herbert: Probleme des Unendlicken: Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig: Vieweg 1967.
- Minsky, Marvin: Computation: Finite and Infinite Machines. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice–Hall 1967.
- Misner, C., Thorne, K. and Wheeler, J.: Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman 1973.

- Moore, Edward F.: Artificial Living Plants. Scientific American. 118–126 (October, 1956).
- Nagel, Ernest and Newman, James R.: Gödel's Proof. New York: New York University Press 1958.
- Newman, J. (ed.): The World of Mathematics, Vol. 1. New York: Simon & Schuster 1956.
- Otto, Rudolf: Mysticism East and West. New York: Macmillan 1960.
- Paris, Jeff and Harrington, Leo: A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. In: A Handbook of Mathematical Logic, ed. J. Barwise, pp. 1133–1142. Amsterdam: North–Holland 1977.

Pascal, Blaise: Pensées et Opuscules, Pensée No. 205, ed. L. Brunschvicq. Paris: Classiques Hachette 1961.

- Passmore, John: Logical Positivism. In: The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5, ed. P. Edwards, pp. 52–57. New York: Macmillan 1967.
- Passmore, John: Philosophical Reasoning. New York: Basic Books 1969.
- Plato: The Dialogues of Plato. Translated by B. Jowett. New York: Random House 1937.
- Plotinus: Enneads. Boston: C. T. Branford 1949.
- Puharich, A. (ed.): The Iceland Papers. Amherst, Wisc.: Essentia Research Associates 1979.

Pynchon, Thomas: Gravity's Rainbow. New York: Viking Press 1973.

Reinhardt, William: Remarks on Reflection Principles, Large Cardinals, and Elementary Embeddings. In: Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XIII, Part 2, ed. T. Jech, pp. 189–205. Providence, R. I.: American Mathematical Society 1974.

- Richard, Jules: The Principles of Mathematics and the Problem of Sets. In: From Frege to Gödel, ed. Jean van Heijenoort, pp. 142–144. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1967.

Robinson, Abraham: Formalism 64. In: Logic, Methodology and Philosophy in Science, ed. Y. Bar–Hillel, pp. 228–246. Amsterdam: North–Holland 1964.

- Robinson, Abraham: Some Thoughts on the History of Mathematics. Compositio Mathematica. 20, 188–193 (1968).
- Robinson, Abraham: The Metaphysics of the Calculus. In: The Philosophy of Mathematics, ed. J. Hintikka. London: Oxford University Press 1969.
- Robinson, Abraham: Non–Standard Analysis. Amsterdam: North–Holland 1974.
- Royce, Josiah: The World and the Individual, First Series, Appendix: The One, the Many and the Infinite, pp. 504–507, New York: Macmillan 1912.
- Rucker, Rudolf v.B.: Notices of the American Mathematical Society. 20, p. 362 (November 1973).
- Rucker, Rudolf v.B.: On Cantor's Continuum Problem. Journal of Symbolic Logic. 41 (June, 1976).
- Rucker, Rudolf v.B.: Geometry, Relativity and the Fourth Dimension. New York: Dover Publications 1977.
- Rucker, Rudolf v.B.: The One/Many Problem in the Foundations of Set Theory. In: Logic Colloquium 76, eds. R. O. Gandy and J. M. E. Hyland. Amsterdam: North–Holland 1977.
- Rucker, Rudolf v.B.: Physical Infinities. Speculations in Science and Technology. 1, 43–58 (April, 1978).
- Rucker, Rudolf v.B.: One of Georg Cantor's Speculations on Physical Infinities. Speculations in Science and Technology 1. 419–421 (October, 1978).
- Rucker, Rudolf v.B.: The Berry Paradox. Speculations in Science and Technology. 2, 197–208 (June, 1979).
- Rucker, Rudolf v.B.: The Actual Infinite. Speculations in Science and Technology. 3, 63–76 (April, 1980).

Rucker, Rudolf v.B.: Towards Robot Consciousness. Speculations in Science and Technology. 3, 205–217 (June 1980).
- Rucker, Rudolf v.B. (ed.): Speculations on the Fourth Dimension: Selected Writings of C. H. Hinton. New York: Dover Publications 1980.
- Rucker, Rudolf v.B.: Faster than Light, Slower than Time. Speculations in Science and Technology. 4, 375–383 (October 1981).

- Rucker, Rudy: On Hyperspherical Space and Beyond. Isaac Asimov's Science Fiction Magazine. 92–106 (November, 1980).
- Rucker, Rudy: White Light, or, What is Cantor's Continuum Problem? New York: Ace Books 1980.
- Rucker, Rudy: Spacetime Donuts. New York: Ace Books 1981.
- Rucker, Rudy: Schrödinger's Cat. Analog. (March 30, 1981).
- Rucker, Rudy: Software. New York: Ace Books 1982.
- Rucker, Rudy: The Fifty–Seventh Franz Kafka. New York: Ace Books 1982.
- Russell, Bertrand: The Principles of Mathematics. Cambridge, England, Cambridge University Press 1903.
- Russell, Bertrand: Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. American Journal of Mathematics. 30, (1908).
  Russell, Bertrand and Whitehead, Albert North: Principia Mathematica. New York: Cambridge University Press 1910–1913.
- Russell, Bertrand: Letter to Frege. In: From Frege to Gödel, ed. Jean van Heijenoort, pp. 124–125. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1967.
- Salmon, Wesley (ed.): Zeno's Paradoxes. New York: Irvington 1970.
- Schlegel, Richard: Completeness in Science. New York: Appleton–Century–Crofts 1967.
- Schrödinger, Erwin: What is Life? & Mind and Matter. Cambridge, England: Cambridge University Press 1969.
- Scott, J. F.: The Mathematical Work of John Wallis. London: Taylor and Francis 1938.
- Shoenfield, Joseph R.: Mathematical Logic. Reading, Mass.: Addison–Wesley 1967.
- Sierpinski, Waclaw: Hypothèse du Continu. Warsaw, Poland: Monografie Matematyczne 1934.
- Smorynski, C.: The Incompleteness Theorems. In: Handbook of Mathematical Logic, ed. J. Barwise, pp. 821–865. Amsterdam: North–Holland 1977.
- Smullyan, Raymond: What is the Name of This Book? Englewood Cliffs, N. J.: Prentice–Hall 1978.

- Suzuki, D. T.: An Introduction to Zen Buddhism. New York: Grove Press 1964.

  Suzuki, D. T.: The Field of Zen. New York: Harper & Row 1970.
- Suzuki, D. T.: Mysticism: Christian and Buddhist. Westport, Conn.: Greenwood 1976.
- Takeuti, Gaisi: The Universe Set Theory. In: Foundations of Mathematics, eds. J. Bulloff, T. Holyoke and S. Hahn, pp. 74–128. New York: Springer–Verlag 1969.
- Takeuti, Gaisi: Proof Theory. Amsterdam: North–Holland 1975.
- Takeuti, Gaisi: Gödel Numbers of Product Space. In: Higher Set Theory, eds. G. H. Müller and D. S. Scott, Lecture Notes No. 669. Heidelberg: Springer–Verlag 1978.
- Turing, Alan M.: Computing Machinery and Intelligence. In: Minds and Machines, ed. A. R. Anderson. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice–Hall 1964.
- Turing, Alan M.: On Computable Numbers, with an Application to the *Entschiedungsproblem.* In: The Undecidable, ed. M. Davis, pp. 116–151. Hewlett, N. Y.: Raven Press 1965.
- Ulam, Stanislaw: Adventures of a Mathematician. New York: Charles Scribner's Sons 1976.
- Varley, John: The Ophiuchi Hotline. New York: Dell 1978.
- Vilenkin, N. Ya.: Stories About Sets. New York: Academic Press 1968.
- Vlastos, Gregory: Zeno. In: The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 8, ed. P. Edwards, pp. 369–378. New York: Macmillan 1967.
- Von Mises, Richad: Probability, Statistics and Truth. Translated by Hilda Geiringer. New York: Macmillan 1957.
- von Neumann, John: Theory of Self–Reproducing Automata. Urbana, Ill.: University of Illinois Press 1966.
- von Tiesenhausen, Georg and Darbro, Wesley A.: Self–Replicating Systems—A Systems Engineering Approach. NASA Technical Memorandum TM–78304. Marshall Space Flight Center, Alabama: 1980.

- Wang, Hao: From Mathematics to Philosophy. New York: Humanities Press 1974.
- Wang, Hao: Large Sets. In: Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory, eds. Butts and Hintikka, p. 309. Dordrecht, Holland: Riedel 1977.
- Weinberg, Steven: The Decay of the Proton. Scientific American. 64–75 (June, 1981).
- Weingard, Robert: On Travelling Backward in Time. Synthese. 24, 117–132 (1972).
- Wette, Eduard: Definition eines (Relativ Vollständigen) formalen Systems Konstruktiver Arithmetic. in: Foundations of Mathematics: Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel, eds. J. J. Bulloff, T. C. Holyoke and S. W. Hahn. New York: Springer–Verlag 1969.
- Wigner, E.: Remarks on the Mind–Body Question. In: The Scientist Speculates, ed. I. J. Good, pp. 284–302. New York: Basic Books 1962.

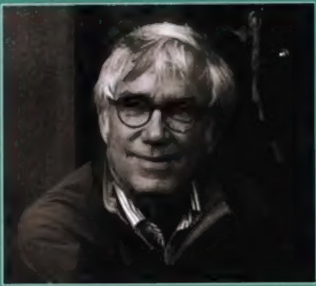
  Wilson, Robert Anton: Schrödinger's Cat: The Universe Next Door. New York: Pocket Books 1980.
- Wittgenstein, L.: Philosophical Investigations. Oxford: Blackwell 1953.

  Wittgenstein, L.: Remarks on the Foundations of Mathematics. Oxford: Blackwell 1956.

  Wittgenstein, L.: Tractatus Logico–Philosophicus. London: Routledge and Kegan Paul 1961.
- Wolter, Allen: Duns Scotus on the Nature of Man's Knowledge of God. Review of Metaphysics (1941).

  Zermelo, Ernst: Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Fundamenta Mathematica. 16, 29–47 (1930).

يحمل هذا الكتاب بين صفحاته تعريفاً بكل أنواع اللانهاية: المُحتمَلة والفعلية، الرياضية والفيزيائية، اللاهوتية والدنيوية. وسيقودنا ذلك إلى العديد من المفارقات المذهلة. وبتفحُّصنا هذه المفارقات عن كثب، سنتعلم الكثير عن العقل البشري وقدراته وحدوده.



سنرى أن دراسة اللانهاية أمر يتجاوز البحث الأكاديمي الجاف والممل، وأن المسعى الفكري لمعرفة اللانهائي المطلق هو شكل من أشكال بحث النفسِ عن الإله، كما أدرك "جورج كانتور" سابقاً. وسواء وصلنا للهدف أم لم نصل، فإن وعينا سيضيء في كل خطوة نجتازها في طريق البحث.

"اللانهاية والعقل" هو رحلة تمثِّل عملية تحول. أهديه بكل حب واحترام لكل من يسير على هذا الطريق.

رودي روكر

9 789933 655648